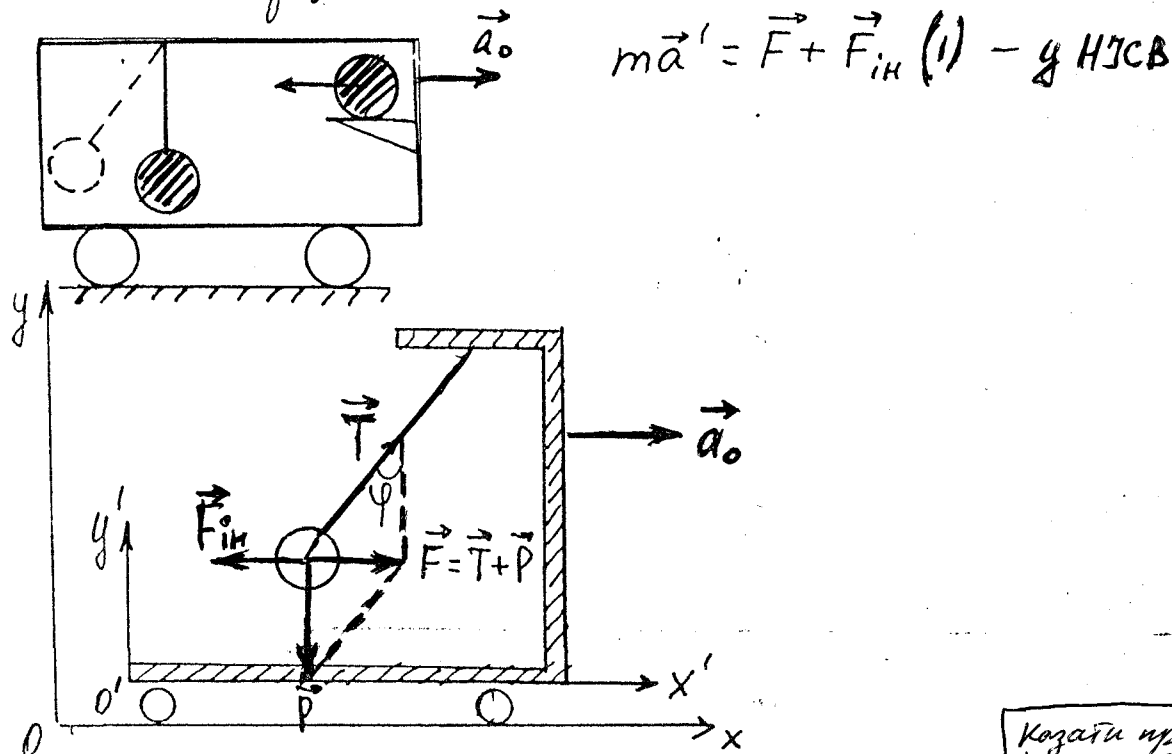


Неінерціальні системи відліку (НІСВ)

1.

1. Визначення НІСВ з т. зору динаміки
2. Час і простір у НІСВ
3. Сили інерції



$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in} \quad (1) \quad - \text{у НІСВ}$$

1. У ІСВ (xoy) спостерігач так пояснює відхилення кульки: «Коли візок починає рухатись, кулька намагається зберегти свій попередній стан і відстає від візка, відхиляючись на кут φ . Нитка буде відхилятися доти, доки рівнодіюча сил тяжіння \vec{P} та сил натягу нитки \vec{T} не досягне величини $\vec{F} = m\vec{a}_0 = \vec{P} + \vec{T}$ »

2. У НІСВ (x'o'y') спостерігач стверджує, що на кульку діє, крім сил \vec{P} та \vec{T} , ще і сила \vec{F}_{in} . Кулька відхиляється на кут φ саме завдяки силі $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$.
Рівнодіюча сила $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = 0$
 $\vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_0 = 0$

Сили інерції - реальні чи фіктивні сили?

У ІСВ $m\vec{a} = \vec{F} \quad (2) \rightarrow (1): m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{in}$

$$m(\vec{a}' - \vec{a}) = \vec{F}_{in} \quad (3)$$

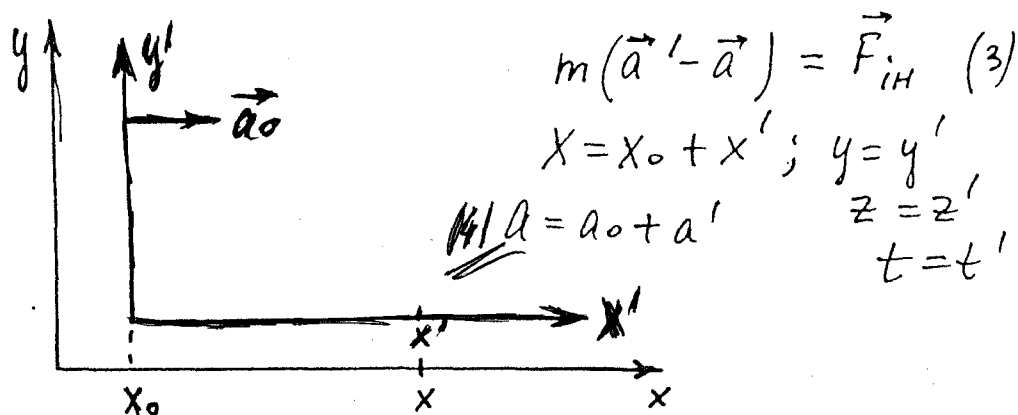
\vec{a}' - приск. відносно НІСВ.

(Відносне прискорення).

\vec{a} - приск. відносно ІСВ
(абсолютне приск.)

Казати про сили інерції в ІСВ не можна, це сили інерції існують в НІСВ!!!

- 1) 3 (3): сили інерції зумовлюють різницю між відносним та абсол. прискоренням
- 2) Сили інерції існують лише в НІСВ.
- 3) Сила інерції направлена протилежно до переносного прискорення НІСВ

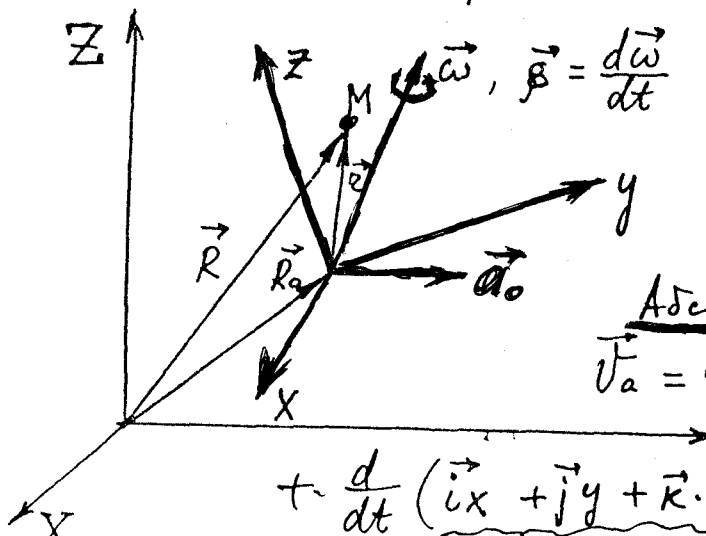


$$(4) \rightarrow (3): m(\vec{a}' - \vec{a}_0 - \vec{a}') = \vec{F}_{in}$$

$$\boxed{\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0}$$

\vec{a}_0 - прискорення НІСВ

(замі: \vec{a} позн позначимо як \vec{a}_c
 \vec{a}_1



$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}_0$

Абс. шв. МТ:

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} +$$

$$+ \frac{d}{dt} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) =$$

$$= \vec{V}_0 + \left(\vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} \right) + \frac{d\vec{i}}{dt}x +$$

$$+ \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z = \vec{V}_a \quad (1) \quad \vec{V}_{\text{вигн}}$$

Що таке $\frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z$ - ?

$\frac{d\vec{i}}{dt}$ - лін. шв. кінця опра \vec{i} при обертанні СВ

$$d\vec{i} = \vec{i} \cdot d\varphi = \vec{i} \cdot \omega dt; \quad d\vec{j} = \vec{j} \cdot \omega dt; \quad d\vec{k} = \vec{k} \cdot \omega dt$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{i} \cdot \omega \Rightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \vec{i}]; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \vec{j}]$$

Тоді $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{\text{вигн}} + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_0 + \vec{V}_{\text{вигн}} + [\vec{\omega} \cdot \vec{i}]x + [\vec{\omega} \cdot \vec{j}]y + [\vec{\omega} \cdot \vec{k}]z =$$

$$= \vec{V}_0 + \vec{V}_{\text{вигн}} + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] = \vec{V}_a \quad (1)$$

\vec{V}_0 - шв. поступального руху СВ ($\vec{V}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$)

\vec{V}_a - шв. абсолютна (шв. тіла відносно ІСВ)

$\vec{V}_{\text{вигн}}$ - вигн шв. тіла (відносно НІСВ)

Суму $\vec{V}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$ називають переносною шв. \vec{V}_e

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] \quad \text{Тоді}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_{\text{вигн}}$$

Дифер. (1): $\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \vec{a}_{\text{вигн.}} +$
 $+ \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] =$

4.

$$\vec{a}_{\text{вигн.}} = \vec{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z}{dt^2}; \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{вигн.}} + [\vec{\omega} \vec{r}]$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{i}]; \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{j}]; \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{k}]$$

$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{вигн.}} + [\vec{\omega} \vec{v}_{\text{вигн.}}] + [\vec{\beta} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{v}_{\text{вигн.}}] +$$

$$+ [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] = \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{вигн.}} + [\vec{\beta} \vec{r}] +$$

$$+ [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] + 2 [\vec{\omega} \vec{v}_{\text{вигн.}}] = \vec{a}_a \quad (2)$$

вектори, які
хар. нерівномір-
ності обертання

$$\vec{a}_{\text{вигн.}} = \vec{a}_a - \vec{a}_0 - [\vec{\beta} \vec{r}] - [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] - 2 [\vec{\omega} \vec{v}_{\text{вигн.}}]$$

$$m \vec{a}_a = m \vec{a}_{\text{вигн.}} + m \vec{a}_0 + m [\vec{\beta} \vec{r}] + m [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] + 2m [\vec{\omega} \vec{v}_{\text{вигн.}}]$$

$$\vec{F}_{\text{вільног.}} = \vec{F}_{\text{вигн.}} + \vec{F}_{0 \text{ ин.}} + \vec{F}_{\text{оберт. ин.}} + \vec{F}_{\text{кор. ин.}}$$

Заміт інерції
Поступальний рух
Обертання системи
Картізісова сист-ма

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt} \quad \text{— приск. пост. руху рухомої СВ} \quad (A)$$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{— кутове приск. оберт. руху рухомої СВ}$$

$$\text{Перекосне } \vec{a}_e = \vec{a}_0 + [\vec{\beta} \vec{r}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] \quad (3)$$

прискорення — приск. тих елементів К'-СВ,
через які в даний момент часу проходить
МТ

\vec{a}_0 — приск. поступального руху К'-СВ

$[\vec{\beta} \vec{r}]$ — приск., зумовлене нерівномірністю
обертання К'-СВ;

$[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]$ — децентрове прискор. (направлене
вздовж літтевої осі обертання);

$2 [\vec{\omega} \vec{v}_{\text{вигн.}}]$ — коріолісове приск. (зумовлене
рухом МТ відносно К'-СВ, яка оберт.);

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{вигн.}} + \vec{a}_k \quad (4) \quad \text{Теорема Коріоліс}$$

В (A) $\vec{F}_{\text{вільног.}} = m \vec{a}_a$ — дія інших тіл (ця сила
існує реально, як результат дії тіл).

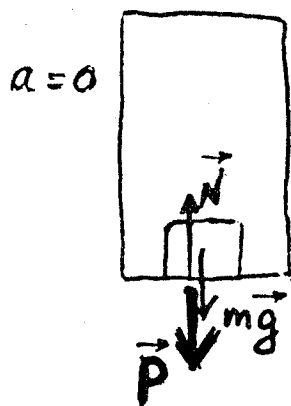
Решта доданків в (A) — сили інерції.

Вони виникають внаслідок прискор. руху К'-СВ

Потрібно і додати — вони виникають

Тіло у ліфті. Невагомість

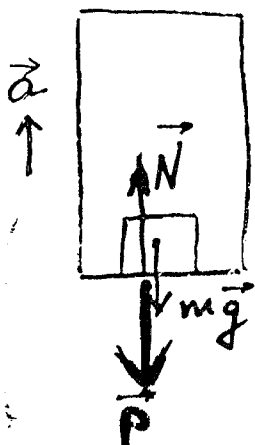
5.



$$mg - N = 0$$

$$P = N$$

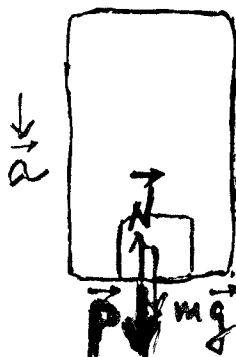
$$P = mg$$



$$N - mg = ma$$

$$P = N$$

$$P = mg + ma$$



$$mg - N = ma$$

$$P = N$$

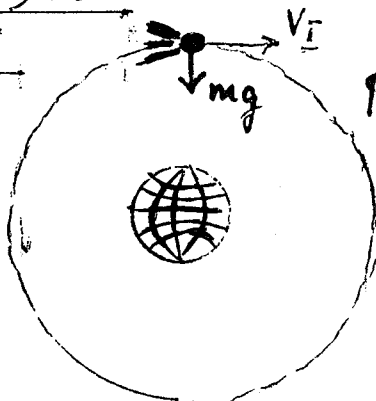
$$P = mg - ma$$

$$a = g$$

$$P = mg - mg = 0$$

Супутник Землі
на орбіті

Тіло на орбіті землі. Невагомість

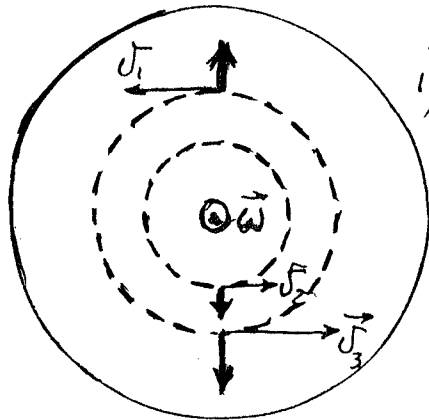


$$P = 0$$

У вільно падаючій
ІУСВ сили інерції
повністю компенсують
дію сили тяжіння і
рух відбувається так,
що ніби не діють ні
сили інерції, ні сили тяжіння.
Це - стан невагомості

Вплив обертання Землі на рух тіл

6.

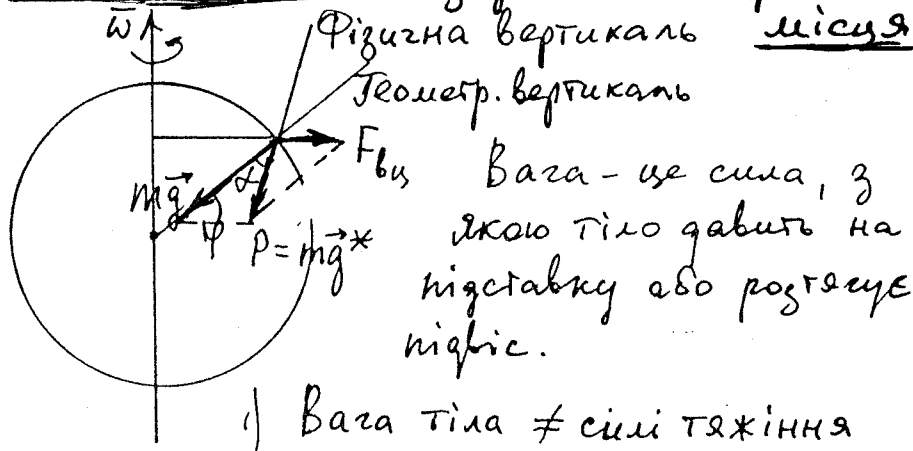


$$1) F_k = 2m \vec{v}_{\text{ліній}} \cdot \vec{\omega} \cdot \sin \varphi$$

$$\vec{F}_k = 2m [\vec{v}_{\text{ліній}} \times \vec{\omega}]$$

$$2) \vec{F}_{\text{бис}} = m \omega^2 \rho$$

Зміна ваги тіла із зміною широти місця.



Вага - це сила, з якою тіло давить на підставку або розтягує нитку.

1) Вага тіла \neq силі тяжіння

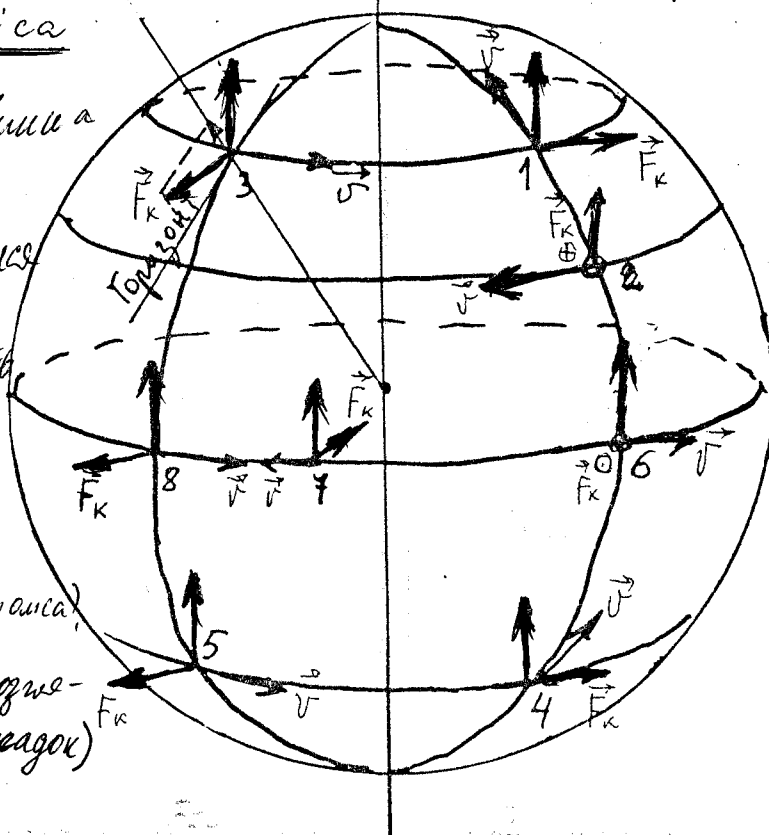
2) Кут α між напрямком сили тяжіння та напрямком виска $\alpha \approx 0.0018 \sin 2\varphi$
 $\alpha = 0$ на полюсах та на екваторі
 $\alpha = \alpha_{\text{max}}$ при $\varphi = 45^\circ$

Сила Коріоліса

Тіло, мас. точка - рухається а рух. поступально по, А система - обертається

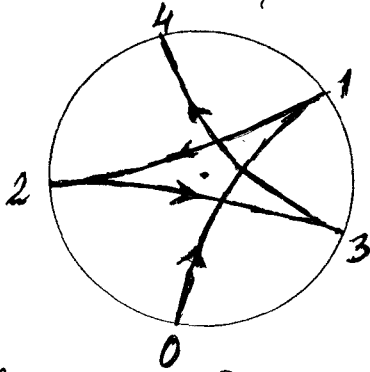
Сила Коріоліса перпендикулярна до швидкості \perp

На полюсі та на екваторі буде більша сила Коріоліса? (який випадок потрібно розглянути конкретний випадок)

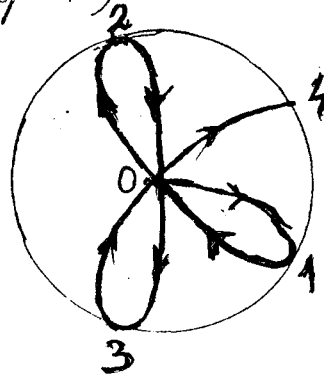


Маятник Фуко. (Доказ обертання Землі, 1850 р, Париж)

7.



Відхищений з т. О м. Ф. починає рухатись до центра рівноваги. Однак F_k відхиляє його вправо і він не проходить через центр рівноваги



Відхищений з т. О (з центра рівноваги, із позитковою швидкістю) м. Ф. повертається у т. О

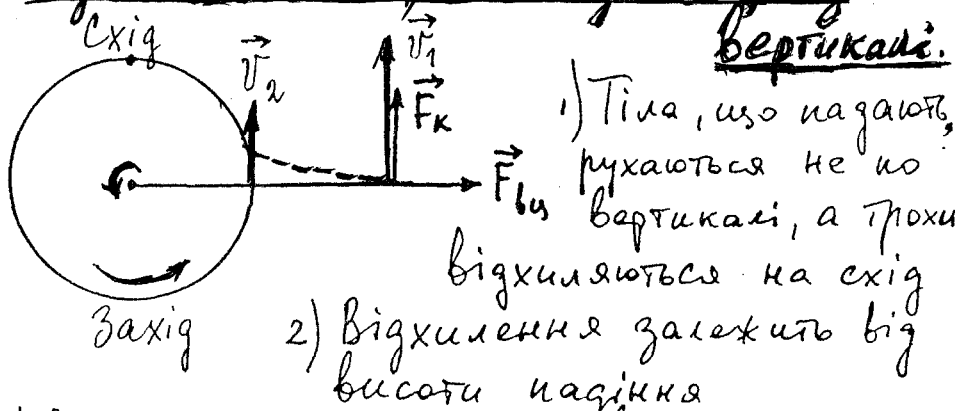
У зв'язку з обертанням Землі змінюється положення площини коливань м. Ф. (На полюсі 1 оберт за добу)

На полюсі цей ефект максимальн.

На екваторі площина коливань м. Ф. не обертається.

Для геогр. широти φ треба враховувати складову $\omega_\varphi = \omega \cdot \sin \varphi$. (Один оберт за $(1/\sin \varphi)$ доби).

Відхилення тіл, що падають, від вертикалі.



1) Тіла, що падають, рухаються не по вертикалі, а трохи відхиляються на схід

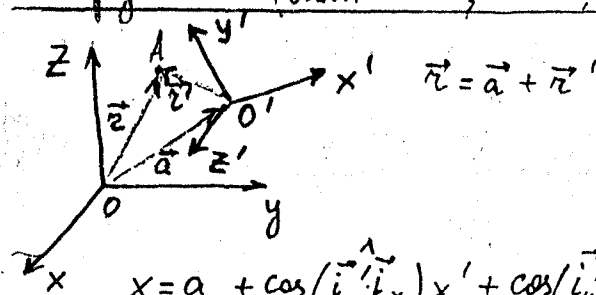
2) Відхилення залежить від висоти падіння

3) Відхилення залежить від географ. широти місця φ . Макс - на екваторі, на полюсі - 0.

Див. задачу з Уродова № 1.111

На замітку, прискорення руху змінюється з широтою

1.
Геометричні перетворення декартових координат (Матвеев, с. 31)



$$x = a_x + \cos(\vec{i}_x \wedge \vec{i}_{x'}) x' + \cos(\vec{i}_y \wedge \vec{i}_{x'}) y' + \cos(\vec{i}_z \wedge \vec{i}_{x'}) z'$$

$$x' = -a_x' + \cos(\vec{i}_x \wedge \vec{i}_{x'}) x + \cos(\vec{i}_y \wedge \vec{i}_{x'}) y + \cos(\vec{i}_z \wedge \vec{i}_{x'}) z$$

Якщо $a = 0$, то позначимо

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$

$$x' = x_1', \quad y' = x_2', \quad z' = x_3'$$

$$\vec{i}_x = \vec{e}_1, \quad \vec{i}_y = \vec{e}_2, \quad \vec{i}_z = \vec{e}_3$$

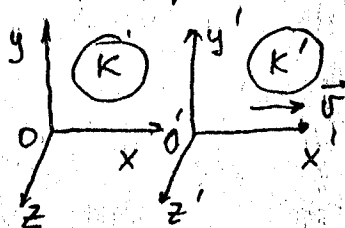
$$\vec{i}_{x'} = \vec{e}_1', \quad \vec{i}_{y'} = \vec{e}_2', \quad \vec{i}_{z'} = \vec{e}_3'$$

$$\cos(\vec{e}_m \wedge \vec{e}_n') = a_{mn} \quad m, n = 1, 2, 3, \text{ то}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + a_{13} x_3' \\ x_2 = a_{21} x_1' + a_{22} x_2' + a_{23} x_3' \\ x_3 = a_{31} x_1' + a_{32} x_2' + a_{33} x_3' \end{cases}$$

Перетворення Галілея

2.



В силу геометр. уявлень отрицено:

$$x' = x - vt; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t' = t$$

Якщо „пересісти“ в K' -сис, то
 $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ і

$$x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'$$

Інваріанти перетворень Галілея

1. Відстань

(x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2)

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2' + vt' - x_1' - vt')^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} = \\ &= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} = l' \end{aligned}$$

$$l = l' = \text{інс}$$

2. $t = t' = \text{інс}$

3. $\Delta t = \Delta t' = \text{інс}$

4. Складання швидкостей

$x'(t)$; $y'(t)$; $z'(t)$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt}; \quad v_y' = \frac{dy'}{dt}; \quad v_z' = \frac{dz'}{dt}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x(t) &= x'(t') + vt'; & y(t) &= y'(t'); \\ t &= t' & z(t) &= z'(t') \end{aligned}$$

Проф. (1):

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v = v_x' + v \neq inv \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} = v_y' = inv \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'} = v_z' = inv \end{cases}$$

5. Інваріантність прискорення

Диф. (1) та враховуємо, що $dt = dt'$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \Rightarrow a_x = a_x' = inv$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \Rightarrow a_y = a_y' = inv$$

Прискорення є інваріантом відносно перетворень Галілея. Швидкість (v_x) не є інваріант.

Адитивність маси і закон збереж. маси

[2] - с. 97

$$m_1, m_2 \Rightarrow m$$

$$K\text{-св.} : \vec{v}_1, \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} ; m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m \vec{v} \quad (1)$$

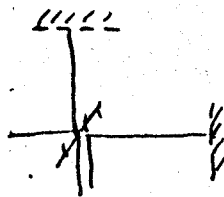
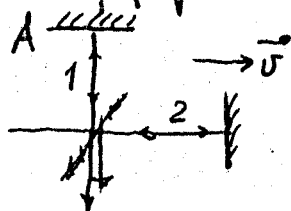
$$K'\text{-св.} : \vec{v}_1', \vec{v}_2' \Rightarrow \vec{v}' ; m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m \vec{v}' \quad (2)$$

V_0 - шв. руху K' -св.

$$\text{Перетвар. Галілея: } \left. \begin{aligned} \vec{v}_1' &= \vec{v}_1 - \vec{V}_0 ; \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{V}_0 \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{V}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (2) \text{ з урахуванням (1): } \boxed{m_1 + m_2 = m}$$

Дослід Майкельсона - Морлі 1881 р., Унтерферометр. 1887 р.



Інтерпретація дослідів Майкельсона

Негативний результат давав декілька способів його пояснення:

1. Базисна гіпотеза? [1] с. 66
2. Невірні рівняння Максвелла (1855 р.)?
3. Ефір повністю захоплюється тілами, що рухаються?
4. Ефіру взагалі немає?!
5. А може (хоча б формально?!) припустити, що розміри тіл, що рухаються, не залишаються сталими (Лоренц, Фіцджеральд (1892 р.)?!)

$$l' = l \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Але вважали шв. світла є відносною

Експеримент Майкельсона

$$c' = c + v \text{ — невірно!}$$

c — стала!

$$c' = c !$$

$$c = \text{інв.}$$

Перетворення Лоренца

Мартенс, 5.
с. 69

З одності часу
впливає твержен-
ня про те, що
перетворення (1), (2)
мають бути
линійними.

2. Перетворення для x та t :

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) & (1) \\ x = \alpha'(x' + vt') & (2) \end{cases}$$

$$x' = ct'$$

$$x = ct$$

$$(3) \quad c = \text{inv.}!$$

(1), (2) \rightarrow (3):

$$\begin{cases} ct' = \alpha t(c - v) \\ ct = \alpha t'(c + v) \end{cases} \quad (4)$$

$$c^2 t t' = \alpha^2 t t' (c^2 - v^2)$$

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{x}{\alpha'} = x' + vt'$$

$$vt' = \frac{x}{\alpha'} - x' = \frac{x}{\alpha} - \alpha(x - vt) =$$

$$1) \alpha = \alpha'$$

$$2) x' = \alpha(x - vt) \quad (1)$$

$$= \alpha vt - \alpha x + \frac{x}{\alpha} = \alpha vt + x \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \Rightarrow$$

$$t' = \alpha t + \frac{x}{v} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) = \alpha \left\{ t + \frac{x}{v} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \right\} =$$

$$\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left\{ t + \frac{x}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) \right\} =$$

$$= \frac{t - (\frac{v}{c^2})x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$t' = \frac{t - (\frac{v}{c^2})x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

(5) \rightarrow (1):

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z} \quad \frac{v}{c} = \beta$$

(5) \rightarrow (2) або із (6):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & y &= y'; & z &= z' \\ t &= \frac{t' + (\frac{v}{c^2})x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}} \quad (7)$$

1) $t \neq t'$ 2) $t = f(x')$ 3) ПЛ - лінійні за x та t

4) Коли $v \ll c$

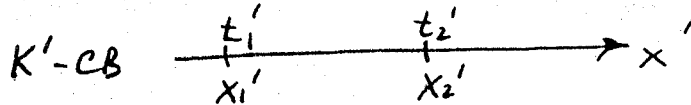
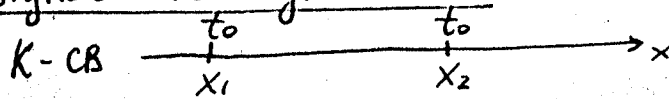
ПЛ \rightarrow ПГалілея

$$5) \frac{v}{c} \leq \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \geq 0$$

Наслідки з перетворення Лоренца

6.

1. Відносність одночасності



$$t_1' = t_2' ??$$

$$t_1' = \frac{t_0 - \left(\frac{v}{c^2}\right)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left| \quad x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right.$$

$$t_2' = \frac{t_0 - \left(\frac{v}{c^2}\right)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left| \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right.$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\left(\frac{v}{c^2}\right)(x_1 - x_2)}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

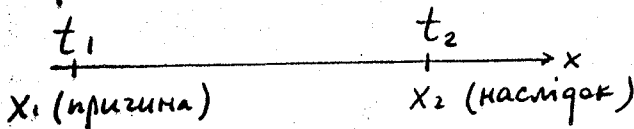
СРС: М.Б. різний і знак! Причинно-наслідковий зв'язок?

- 1) Події в K'-СВ відбуваються не одночасно, а розділені інтервалом часу $\Delta t'$
- 2) Одночасні події в одній СК м.Б. неодночасними в іншій
- 3) Поняття одночасності не має абс. х-ар, воно залежить від СВ

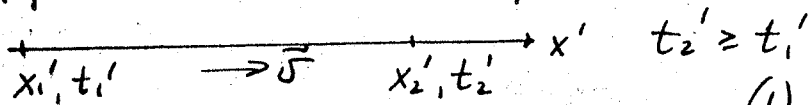
K-SB:

K'-SB:

2. Граничний шв. передачі інф.



$$t_2 > t_1 \quad v_c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

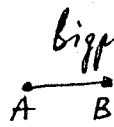
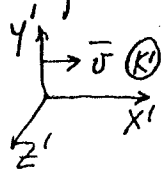
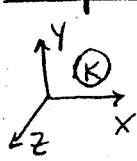


$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2 - t_1 + \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \stackrel{(1)}{=} \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{v}{c^2}v_c\right)$$

$\left(1 - \frac{v}{c^2}v_c\right) > 0$ Унакше наслідок буде раніше причини

$$v_c < \frac{c}{v} \cdot c \Rightarrow \frac{v}{c} = \beta \leq 1 \Rightarrow v_c \leq c$$

3. Скорочення довжини рухомого тіла.



Відрізок $AB \parallel OX$, рухається разом з K' -СК (покоїться в K' -СК).

$l_0 = x_2' - x_1'$ — довжина („власна“) в K' -СК

Для вимірювання довжини AB в K -СК необхідно відмітити координати кінців відрізка x_1 та x_2 в один і той же момент часу $t_1 = t_2 = t$

$$l = x_2 - x_1$$

$$\text{З перетв. Лоренца } x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\boxed{l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Висновки: 1) $l < l_0$; 2) вздовж Ox та Oz розміри не змінюються; 3) $l = f(v)$. При $v = 0$ $l = l_0$
При $v \rightarrow c$ $l \rightarrow 0$

4) Скорочення реальне, а не уявне

5) Скорочення кінематичне, а не динамічне (немає напруж, деформацій).

6) При русі тіла його форма $\boxed{?}$ змінюється — СРС.

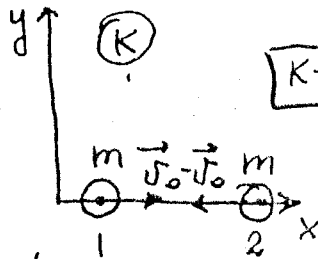
Динаміка СТВ

(1)

I. Релятивістський імпульс

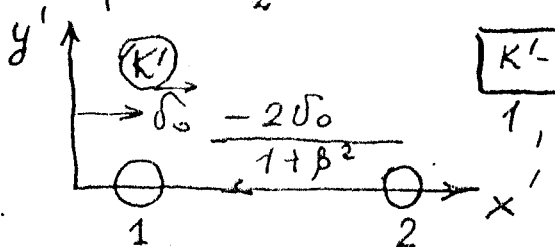
Закон збер. імп. не інваріантний до перетв. Лор.

Абс. непружний удар.



[K-СВ]: Після зіткнення кулі будуть покоїтись

ЗЗУ: $m\vec{v}_0 - m\vec{v}_0 = 0$ ОК!



[K'-СВ]: пов'язана із кулею 1, в ній вона покоїтись

До зіткнення:
 $v_1' = 0$

Після зіткнення:

$v_1' = v_2' = -v_0$

$v_2' = -2v_0 \frac{1}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$

Сумарний імпульс:

до зіткнення: $-2m\vec{v}_0 \frac{1}{1 + \beta^2}$ | ЗЗУ не

після зіткнення: $-2m\vec{v}_0$ | виконується

1. Якщо $v \ll c$, то сум. імп (імп. системи)

до і після зіткнення практично однакові.
(ЗЗУ майже виконується).

2. Для великих v явне порушення ЗЗУ.

3. Треба шукати такий вираз для імп., щоб ЗЗУ був інваріантним по відн. до перетв. Лоренца.

4. Релят. вираз для \vec{p} повинен при $v \ll c$ переходити в ньютонівск. вигляд $\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$

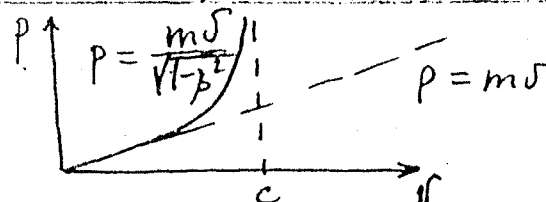
СРС: Можна показати, що

таким умовам задовольняє вираз

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

$\vec{p} = m\vec{v} \cdot \gamma$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$



2. Релятивістська енергія

(2)

$$p = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{c}{c} = \frac{c m \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p^2 = \frac{c^2 m^2 \beta^2}{1-\beta^2} \quad (1)$$

$$1 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \quad | \cdot m^2 c^4$$

$$m^2 c^4 = \frac{m^2 c^4}{1-\beta^2} - \frac{m^2 c^4 \beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m^2 c^4}{1-\beta^2} - \frac{m^2 c^4 \beta^2}{1-\beta^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{m^2 c^4}{1-\beta^2} - p^2 c^2 \quad (2)$$

зліва - $inv \Rightarrow$ справа - inv

Якщо β - мале: $(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots$$

$$(3) \quad \boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad E = mc^2 \gamma$$

Екін! \Rightarrow

зліва big зника
"≈" так енергія!

Повіримося до inv (2):

$$m^2 c^4 \stackrel{(3)}{=} E^2 - p^2 c^2 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$(4) \quad \boxed{E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

① Якщо порівняти (3) з виразом релат. імпульсу: $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{v}}{c^2} E}$$

② Якщо $v=0 \Rightarrow p=0$

$$\boxed{E = mc^2 = E_0} \text{ - ен. спокою}$$

$$\textcircled{3} \quad v=c \Rightarrow p = \frac{E}{c} \Rightarrow (E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4) \Rightarrow E^2 = \frac{E^2}{c^2} \cdot c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \underline{m=0!}$$

Безмасова частинка ($m=0$) із $v=c$: фотон

$E_0 = 0$. В стані спокою не існує. Зникнути

зникати. «Покой ей только снится».

④ Іксно $\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = dt$, то

$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}$; Крім того $E = mc^2 \gamma$

⑤ $E_{kin} = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$. Іксно $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то
 При $\beta \ll 1$ $E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{m_0 v^2}{2}$ (можна скористатись розкладом у ряд)
 $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots$

⑥ Як і в клас. механіці, в СТВ ен. та імпульс адитивні:
 $E = \sum_{i=1}^n E_i$; $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$

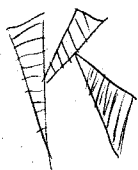
⑦ "Масивне" тіло ($m \neq 0$) не може рухатись із шв. світла ($E \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$).

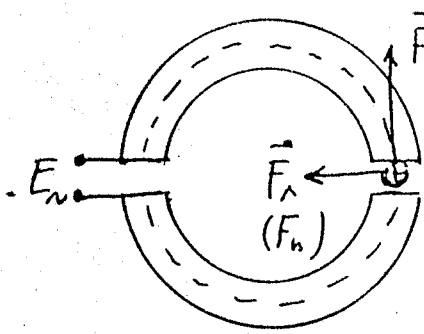
⑧ В СТВ мають місце ЗЗІ та ЗЗЕ ізольованої частинки або ізольованої системи ч.-ок

⑨ Перетворення Лоренца для енергії та імп.

$E \rightarrow (E' + \beta \vec{p}' \cdot \vec{v}) \gamma$; $p_x = (p_x' + \frac{\beta E'}{c^2}) \gamma$
 $p_y \rightarrow p_y'$; $p_z \rightarrow p_z'$

⑩ $\frac{E^2 - p^2 c^2}{m^2 c^4} = c^2$, хога $E \neq i m c^2$ та $p \neq i m v$.





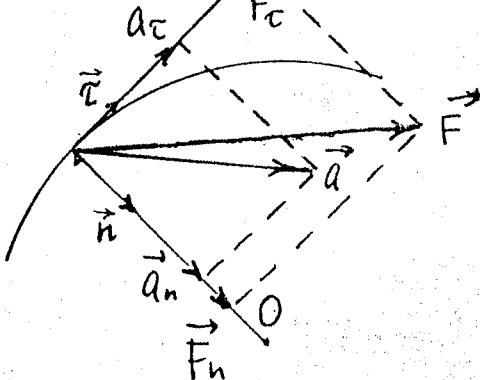
$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]) \quad (4)$$

Експеримент дає: - дуб. рис. 2.

$$\frac{F_n}{a_n} = \frac{\text{const}}{(1-\beta^2)^{1/2}}; \quad \frac{F_e}{a_e} = \frac{\text{const}}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

Для $v \ll c$ $\frac{F}{a} = \text{const}$ - міра інертності частинки = m

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_n = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e} + \frac{m}{(1-\beta^2)^{1/2}} \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} - \text{рівняння руху}$$



$$d\vec{e} = \frac{d\vec{s}}{R} \Rightarrow \frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} \cdot v = \vec{n} \cdot v \cdot \frac{1}{R}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \vec{e} + \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{e}}{dt} \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}\vec{e}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{де } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Вигляд осн. рівняння динаміки

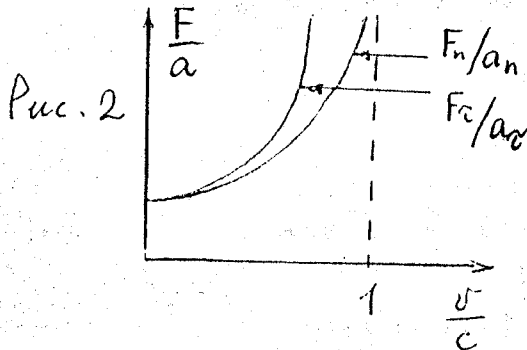
в СІВ та в клас. механіці однаковий

Але: 1) \vec{p} - релятив. імпульс

2) $\vec{F} \neq a$

У релат. механіці:
- прискорення не збігається за напрямом з \vec{F} з частинки!

- відмінність інертності частинки, що рухається, уздовж швидкості і перпендикулярно до неї
" $m_{\perp} \neq m_{\parallel}$ "



4. Зв'язок між силою та прискоренням

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{та} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Зберігаються в} \\ \text{СТВ ньютонівські} \\ \text{співвідношення} \end{array} \right.$$

В СТВ: $E = mc^2 \gamma$; $\vec{p} = m\vec{v} \gamma$

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{F} = \frac{d(m\vec{v} \gamma)}{dt}} &= m \left[\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{d\gamma}{dt} \right] = \\ &= m \left[\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d(1 - v^2/c^2)^{-1/2}}{dt} \right] = \\ &= m \left[\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left(-\frac{1}{2} \right) (1 - v^2/c^2)^{-3/2} \left(-\frac{2\vec{v}}{c^2} \right) \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \\ &= m \left(\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \boxed{m \left[\gamma \vec{a} + \gamma^3 \beta \beta \cdot \vec{a} \right]} \quad (A) \end{aligned}$$

З (A) видно, що прискорення \vec{a} співпадає за напрямком з силою \vec{F} , що його викликає, тільки у випадку $\vec{F} \perp \vec{v}$

$\vec{F} = \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}$ а) Якщо $\vec{F} \perp \vec{v}$, то $\vec{F} = \vec{F}_{||} = m \gamma \vec{a}$

б) Якщо $\vec{F} \parallel \vec{v}$, то $\vec{F} = \vec{F}_{\perp} = m \gamma^3 \beta \beta \cdot \vec{a}$

Висновки: 1) Невизначені з т.з. ньютонівської механіки рівняння (A) правильно описує рух релат. частинки і вже 100 років підтверджується;

2) $\vec{a} \parallel \vec{F}$ лише тоді, коли $\vec{F} \perp \vec{v}$;

3) В інших випадках (крім $\vec{F} \perp \vec{v}$) до прискор. додається складова, паралельна швидкості (\vec{v});

4) Ця складова пропорц. $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ і в разі $\beta \ll 1$ нею можна знехтувати;

5) Інертність частинки по напрямку руху \neq інертності частинки, яка перпендик. до швидкості руху; $m \neq m \gamma^3 \beta^2$;

6) якщо визначити інертну масу як відношення \vec{F}/\vec{a} , то ця величина в СТВ залежить від взаємного розташування напрямків \vec{F} та \vec{v} і тому однозначним чином її визначити не можна. Маса не є мірою інертності.

7) Єдиної міри інертності для релат. частинки не існує, оскільки окрім тіла прискорюючої його сили залежить від кута між силою та швидкістю.

Маса + швидкість - міра інертності

(6)

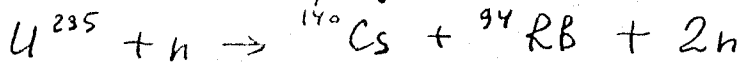
Зв'язок маси та енергії. Приклади взаємоперетворень енергії спокою і кінетичної енергії.

Ейнштейн (1905 р.) відкрив фіз. сенс маси, ввівши у фізику поняття енергії спокою $E_0 = mc^2$

$$E - E_0 = E_{\text{кін}} \Rightarrow E - E_{\text{кін}} = E_0 = mc^2$$

Треба казати про еквівалентність енергії спокою та маси: Маса тіла є міра енергії, що міститься в ньому.

Пр. 1. Реакція розпаду ядра U^{235}



Маса спокою U^{235} і повільного нейтрона $>$ сум. маси спокою частинок в правій частині формули n на $4 \cdot 10^{-28}$ кг

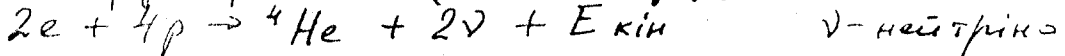
Цю надлишкову масу відноб'язує внутр. енергія

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-28} \text{ кг} \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$$

Ця ен. перетворюється в кін. ен. частинок, що утворюються, та в енергію ел.м. випромінювання.

$$(\Delta m/m) \sim 0.9 \cdot 10^{-3} \approx 0.1\%$$

Пр. 2. Термоядерні реакції (синтез ядер) – на Сонці



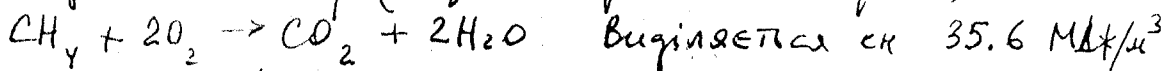
Енергія, що виділяється $E_{\text{кін}} = 93.3 \text{ Мев}$

$$m_p = 938 \text{ Мев}; \quad m_e = 0.5 \text{ Мев} \Rightarrow (\Delta m/m) = 0.8 \cdot 10^{-2}$$

Пр. 3. Анігіляція електрона та протона = 0.8% !

Утворюються 2 фотони. Вся енергія спокою е та р переходить в кін. ен. фотонів.

Пр. 4. Горіння метану (газова горілка на кухні)



$$(\Delta m/m) = 10^{-10} \quad \text{В хім. реакціях величина } (\Delta m/m)$$

на 7-8 порядків менша, ніж в ядерних, але суть механізму виділення енергії така ж сама: енергія спокою переходить в кінетичну енергію.

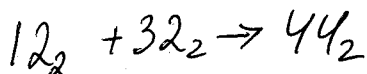
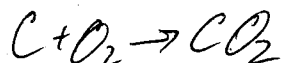
Маса тіла змінюється завжди, коли змінюється його внутрішня енергія. Наприклад:

1) при нагріванні залізного чутюга на 200° його маса збільшується на величину $(\Delta m/m) = 10^{-12}$

2) при плавленні деякої кількості льоду (лід перетворюється у воду) $(\Delta m/m) = 3.7 \cdot 10^{-12}$

3) При непружкому ударі 2-х частинок, маса спокою утворюваних частинок (m_Σ) в системі центра мас дорівнює $m_\Sigma = m_1 + m_2 + \frac{\bar{E}_{K1} + \bar{E}_{K2}}{c^2}$, тобто $m_\Sigma > m_1 + m_2$

4) Згорання вуглецю в атмосфері кисню,



Виділяється тепло.

Сучасні уявлення про масу

Л.Б.Окунь Усп. физ. наук
1989, т. 158, №3, с. 511
2000, т. 170, №12, с. 1364

1. $M_{\text{маса}}$ - є лоренцовий інваріант
2. Маса ізольованої системи зберігається із часом
3. Маса не адитивна

Ен. та імпульс адитивні. Сумарна ен. (E) двох вілких тіл дорівнює сумі їх енергій $E = E_1 + E_2$

Аналогічно $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Крім того, $E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{\vec{p}^2}{c^2} = \text{інв}$$

$$m^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{c^2} = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{p_1^2 + 2\vec{p}_1 \vec{p}_2 + p_2^2}{c^2} =$$

$$= \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} (p_1^2 + p_2^2 + 2 \frac{E_1 E_2}{c^4} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \neq (m_1 + m_2)^2$$

$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$

Сумарна маса виявляється залежною від кута між \vec{p}_1

Маса системи із 2-х фотонів з ен. E у кожного та \vec{p}_2 дорівнює $m_{\uparrow\uparrow} = \frac{2E}{c^2}$, якщо вони летять в протилежні напрямки

$m_{\uparrow\uparrow} = 0$, якщо фотони летять в одну сторону

Якщо $v \ll c$, то $m_1 + m_2 \approx m$

4. У Ньютона теж $m \neq m(v)$. Чим відрізняється трактування маси в СТВ та в клас. механіці? в СТВ:

а) існують безмасові частинки; б) $m_1 + m_2 \neq m$ М. - не адитивна

Маса - лоренцовий інваріант
- не адитивна

~~$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$~~

1. 3-вимірний простір (евклідов пр-р):

 \vec{A} - будь-який вектор
$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = inv$$

(компоненти вектора при повороті СК перетворюються по тим же законам, що і координати).

2. 4-вимірний простір (Мінковськ.)

По аналогії із 3-хвим. простором під 4-вимірним вектором розуміють сукупність 4-х величин:

a_t, a_x, a_y, a_z , які перетворюються по тим же формулам, що і ct, x, y, z у перетвореннях Лор для коорд. і часу.

Квадрат такого 4-вектора визначається як $a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = inv$

3. Виберемо сукупність таких

величин: $E/c, p_x, p_y, p_z$ (1)

Так само, як і за визначенням:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = inv = mc^2$$

Цей inv пов'язаний з формулою

$$E = \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Це формула є наслідком твердження, що сукупність величин (1) утворює 4-вектор

6. Перетворення Лоренца

Без доведення. (Доведення див. на с. 91-92, Матвеев):

$$a_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \cdot a_x';$$

$$a_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot a_y'; \quad a_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot a_z'$$

Проекція прискорення на напрям швидкості зменшується пропорційно $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$

Поперечна складова прискорення (перпендикулярна до швидкості частинки) менша за складову прискорення у рухомій (K') СВ в $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ разів.

Чотири вектор простору-часу.

11.

$\vec{r}(x, y, z) \Rightarrow \vec{s}(x, y, z, ict)$ $x, y \in$ простір-час
Простір і час пов'язані. як одне ціле

$$t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

4-вимірний простір (Мінковський Тетраед, (1908))
Положення МТ в кожний момент часу визначається 4-ма коорд: x, y, z, t (ст).

Таку точку наз. світловою точкою

Рух МТ у 4-вимірному просторі-часі зображається світловою лінією.

Явища у 4-вимірн. пр.-часі наз. подіями

Розглянемо 2 події: x_1, y_1, z_1, ct_1

$$x_2, y_2, z_2, ct_2$$

ΔS -інтервал

Відстані між 2-ма подіями (світловими точками) — $\Delta S \in$ 4-вимірний вектор кривизни.

$$\Delta S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2^2 - x_1^2) - (y_2^2 - y_1^2) - (z_2^2 - z_1^2) = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = \Delta S^2$$

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \text{інс} \text{ по Галілею}$$

По СТБ:

$$t = \text{інс}$$

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}; \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2$$

$$\boxed{\Delta S^2 = \text{інс}} \leftarrow \text{СРС, Хоча } \Delta t; \Delta l \neq \text{інс}$$

ΔS - просторово-часовий інтервал

S - чотири-вимірний вектор

1) Часоподібний інтервал $\Delta S^2 > 0$ ($\Delta l^2 < c^2 \Delta t^2$).

2) Простороподібний інтервал $\Delta S^2 < 0$ ($\Delta l^2 > c^2 \Delta t^2$)

Для дійсного інтервалу ($\Delta S^2 > 0$): події, розділені таким інтервалом, ні в одній із СВ не можуть бути одночасними. Дві події в усіх СВ здійснюються з однаковою послідовністю. Події, пов'язані причинно-наслідковим зв'язком, м.б. розділені лише інтервалом $\Delta S^2 > 0$

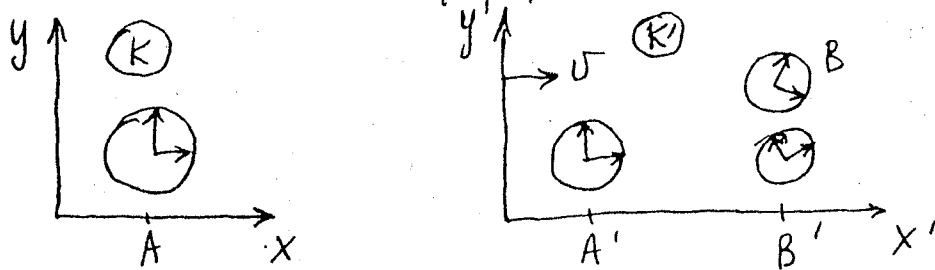
Савельев
с. 228-231

Кутерук та інш.
с. 198-200

Матвеев,
с. 78-79

4. Сповільнення часу в рухомих СК

8.



Годинники A та A', синхронізовані, в певний момент часу, знаходяться в одній т. простору і показують час відповідно t_1 та t_1' .

Через певний час A' разом із K'-СВ перемістився в положення B' і показує час t_2' .

Щоб зафіксувати час у K-СВ, потрібно скористатись годин. B, і розмістити його поруч з годин. B' у момент часу t_2 .

K'-СВ: між 2-ма моментами $\Delta t' = t_2' - t_1'$

K-СВ: $\Delta t = t_2 - t_1$

Скористаємось перетв. Лоренца $t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, де x' - координ. точки, в якій знаход.

$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ або $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

- 1) Час у СК, відносно якої годин. нерухомий, наз. "власним" часом
- 2) $\Delta t > \Delta t'$: У рухомих СВ відбувається сповільнення часу, вимірюемого годин. нерух. СВ
- 3) Ефект сповільнення часу є об'єктивним
- 4) У кожній УСВ існує власний час протікання фіз. процесів. Не існує єдиного світового часу
- 5) Ефект сповільнення часу багаторазово спостерігався в експериментах з косм. променями і елемент. час.

5. Перетворення та додавання швидкостей

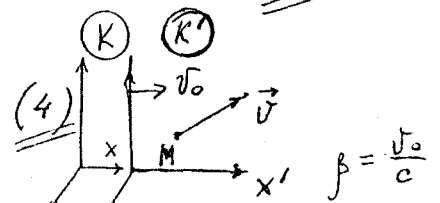
9.

(K) $t: x, y, z$; $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$ $v_z = \frac{dz}{dt}$

(K') $t': x', y', z'$ $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$ $v_y' = \frac{dy'}{dt'}$ $v_z' = \frac{dz'}{dt'}$

$y = y'$; $z = z'$; $x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow dx = \frac{dx' + v_0 dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; $dy = dy'$ $dz = dz'$ (3)

$t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow dt = \frac{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$



Кожне з 3-х рівнянь (3) поділимо на (4):

$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v_x' + v_0}{1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}}$	$v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}}$	$v_z = \frac{v_z' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}}$
---	--	--

(A) *

$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$

$v_y' = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} = f(v_x)!$

$v_z' = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} = f(v_x)!$

Додавання швидкостей. Тіло рухається в додатковому напрямі OX: $v = v_x$ та $v' = v_x'$. Тоді

$v_{\text{рез}} = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}}$

Висновки: 1) Коли $v \ll c$, то $v_x' = v_x - v_0$; $v_x = v_x' + v_0$

2) Коли $v_x' = c$, то

$v_x = \frac{c + v_0}{1 + \frac{v_0 c}{c^2}} = \frac{(c + v_0) \cdot c}{c + v_0} = c$

- шв. світла однакова у всіх УСВ
- резулт. (сумарка) шв. не може перевищ. c

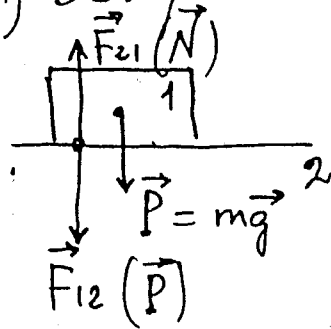
* Коли $\beta = \frac{v_0}{c} \rightarrow 0$, то із (A) отримуємо:

$v_x = v_x' + v_0$; $v_y = v_y'$; $v_z = v_z'$, тобто формули додавання швидкостей відносно перетворень Галілея.

33-закон збереження

Закон збереження імпульсу (принцип інтеграл від рівняння руху)

1) ЗЗІ для системи з 2-х МТ



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (\vec{N} = -\vec{P})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} = 0$$

$$d\vec{p} = 0 \text{ або } \vec{p} = \text{const.}$$

2) Сила, що діє на замкнену СМТ

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{(i)} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

3) Рівняння (основне р-ня) руху СМТ

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$$

4) Якщо $\vec{F}^{(e)} = 0$, тобто замкн. СМТ,

$$\text{то } \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 0} \Rightarrow \boxed{d\vec{p} = 0} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \text{const}}$$

Зауваження:

1. Система не ізолювана, але геом. сума зовн. сил $= 0$: ЗЗІмп. виконується як і для ізолюваної системи

2. "Частково" ізолювана система

$\vec{F}^{(e)} \neq 0$ — система не ізолювана, повний імпульс не зберігається. Але: зберігається проекція на один з напрямів

$$\frac{d\vec{p}_x}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_x = \text{const}$$

$$\text{хоча: } \frac{d\vec{p}_y}{dt} \neq 0; \frac{d\vec{p}_z}{dt} \neq 0$$

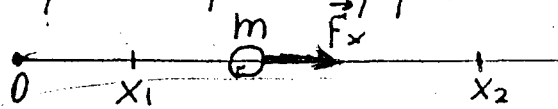
$$\frac{d\vec{p}}{dt} \neq 0; \vec{p}_y \neq \text{const}$$

$$\vec{p}_z \neq \text{const}; \vec{p} \neq \text{const}$$

Закон збереження енергії

6.

1. Одновимірний рух



$$\frac{m \cdot d\vec{v}_x}{dt} = F_x \quad \left| \cdot \vec{v}_x \right.$$

помножити на \vec{v}_x
і праву частину
очислити, то ми
отримаємо

$$\frac{m \cdot \vec{v}_x \cdot d\vec{v}_x}{dt} = F_x \cdot \vec{v}_x \quad (1)$$

$$\vec{v}_x \cdot \frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v_x^2)}{dt} \quad (2) \quad (2) \rightarrow (1):$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m v_x^2}{2} \right) = F_x \cdot v_x \equiv F_x \frac{dx}{dt}$$

$$d \left(\frac{m v_x^2}{2} \right) = F_x \cdot dx \Rightarrow \int_{v_{x1}}^{v_{x2}} d \left(\frac{m v_x^2}{2} \right) = \int_{x1}^{x2} F_x dx$$

$$\frac{m v_{x2}^2}{2} - \frac{m v_{x1}^2}{2} = \int_{x1}^{x2} F_x dx \equiv A \quad (3)$$

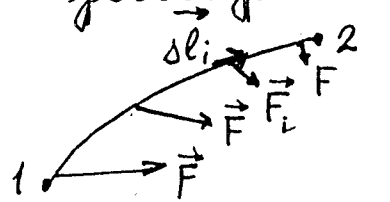
$$\boxed{\Delta E_k = A} - 33 \text{ кінет. ен. при русі МТ по} \\ \text{прямій лінії (вздовж ОХ).}$$

Зміна кін. ен. МТ від час її переміщення між двома положеннями дорівнює роботі, яка при цьому виконується силою.

З (3) видно, що кін. ен. змінюється, якщо $F \neq 0 \Rightarrow$ Кін. ен. зберігається, якщо $\vec{F} = 0$

Коли $F_x = 0$ з (3): $\Delta E_k = \text{const} \Rightarrow v = \text{const}$

2. Рух по довільній траєкторії



$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{\ell})$$

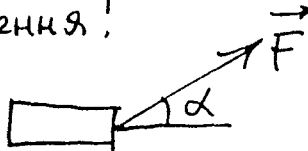
$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Робота сили
вздовж
кривої L

Переміщення МТ НЕ збігається

з напрямом сили.

Роботу виконує компонента сили вздовж
переміщення.



$$A = |\vec{F}| \cdot s \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad | \quad \times \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$m \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$|\vec{v}^2 \rightarrow v^2; \quad d\vec{r}^2 \Rightarrow d\vec{\ell}; \quad \text{інтегруємо}$$

$$\frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad 33 \text{ ен. при}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{12} \quad \text{руці МТ по}$$

$$\text{криволінійній траєкто- рії}$$

Робота сили при переміщенні МТ дорівнює
кін. енергії цієї МТ.

приросту

Якщо $\vec{F} = 0$, то $\frac{m\vec{v}^2}{2} = \text{const} \Rightarrow m\vec{v} = \text{const}$
 $v \Rightarrow \text{const} \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$

У відсутності сили траєкторія руху МТ є
прямю лінією.

Зуваження про універсальний ^{характер} х-ер з енергії

Потенціальні сили (ПС)


Потенціальні \equiv консервативні

① Визначення ПС: робота ПС по переміщенню між 2-ма точками НЕ залежить від шляху переміщення.

Приклад пот. сил - сили гравітації.

Приклад непот. сил - сили тертя.

② Визначення ПС: робота ПС залежить тільки від початкової та кінцевої точок траєкторії і не залежить від вигляду траєкторії.



Шляхи інтегрування різні.

$$A_{12} = \int_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}; \quad A_{12} = \int_{L_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$1) \Delta A = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$$

$$2) \int_{1(L_1)}^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{2(L_2)}^1 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \int_{1(L_1)}^2 + \int_{2(L_2)}^1 = 0$$

③ Інтеграл по замкненому контуру $\oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$

Визначення ПС

Сили є консервативними, якщо в стаціонарному випадку їх робота на будь-якому замкненому шляху дорівнює нулю.

Центральні сили (ЦС)

ЦС залежать тільки від відстані між тілами, що взаємодіють, і направлені по прямій, яка проходить через ці тіла (через їх ц.м.).

Приклад ЦС - сили гравітації

Можна довести, що ЦС є потенц. силами.

Потенціальна енергія МТ в полі

Без доведення:

Якщо F_x, F_y, F_z є проекціями потенц. сил, то існує така функція $E_n(x, y, z)$ (пот. енергія), за допомогою якої ці проекції можна записати:

$F_x = -\frac{dU}{dx}$, коли $y = \text{const}, z = \text{const}$:

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z} \quad (1)$$

$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$,

Далі: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{e} = F_x dx + F_y dy + F_z dz =$
 $= F_x dx + F_y dy + F_z dz =$ $dA = -dU$

Похідна від функції однієї змінної \rightarrow

частинну похідну від ф-ції декількох змінних

$$= -\frac{\partial E_n}{\partial x} dx - \frac{\partial E_n}{\partial y} dy - \frac{\partial E_n}{\partial z} dz \equiv -dE_n \quad (2)$$

тотожно дорівнює.

Закон збереження повної енергії

$$\int_{12} \vec{F} d\vec{e} = - \int_1^2 dE_n = -(E_{n2} - E_{n1}) \quad (3)$$

Робота сил у потенціальному полі залежить від початкової та кінцевої точок траєкторії і не залежить від її вигляду.

Ракіш було: $A = \frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2}$. Тоді:

$$\frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2} = -(E_{n2} - E_{n1})$$

$$\frac{m\vec{v}_2^2}{2} + E_{n2} = \frac{m\vec{v}_1^2}{2} + E_{n1}$$

Сума кін. ен. та пот. ен. під час руху залишається сталою.

$\frac{m\vec{v}^2}{2} + E_n = \text{const}$

Закон збереження енергії (закон перетворення енергії)

Стосується замкнених систем!

Для незамкненої системи:

$$(E_{k2} + E_{n2}) - (E_{k1} + E_{n1}) = A_{\text{зовн. сил}}$$

Енергія ніколи не зникає і не з'являється, а тільки перетворюється з енергії одного виду в іншу.

Зв'язок сили і потенціальної енергії

$$dA = -dE_n \quad - \text{було}$$

$$\begin{array}{l} F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x} \\ + \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y} \\ + \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} * \vec{i} \\ * \vec{j} \\ * \vec{k} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{дамноємо ліву і праву част. на орт } i, j, k \\ \text{відповідно} \end{array}$$

$$F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} = \vec{F} \quad - \text{якщо скласти ліві частини.}$$

Якщо скласти праві частини:

$$-(\vec{i} \cdot \frac{\partial E_n}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial E_n}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial E_n}{\partial z}) = -\overrightarrow{\text{grad}} E_n \quad - \text{вектор!}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_n = -\nabla E_n} \quad (\nabla - \text{"набла"})$$

Заключні слова по 33

1) 33 - фундаментальні закони; бо виконуються у різних розділах фізики.

2) 33 - три: $\textcircled{I} \quad \vec{p} = \text{const}; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = 0$ система замкнена
 $\textcircled{II} \quad \vec{L} = \text{const} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = 0$ - система замкнена
 закон зберег. імпульсу

$\textcircled{III} \quad E = \text{const} \Rightarrow$ 33 повної енергії.
 замкн. сист.

3) Всі три 33 справедливі для замкнених (ізолюованих) систем.

Закони збереження та симетрії простору і часу.

1. ЗЗ імпульсу зв'язаний з однорідністю простору.
2. ЗЗ моменту імп. зв'язаний з ізотропністю простору.
3. ЗЗ енергії зв'язаний з однорідністю часу.

1. Зв'язок ЗЗ імпульсу з однорідністю простору
ЗЗІ доводимо для ізольованої системи, виходячи із II та III з.Н.

Доведемо це:

Але III з.Н. випливає з однорідності простору:

Що таке однорідність простору:

1. Ідентичність (еквівалентність) всіх точок прост.
2. Розбиток подій в ізольованій СМТ не залежить від того, в точках якої обл. простору ця система локалізована.
3. Коли всі точки ізольованої СМТ зністити на $\delta \vec{r}$, то ні стан системи, ні її внутрішній рух не зміняться.
4. Повна робота внутр. сил СМТ при зміщенні її на $\delta \vec{r}$ має дорівнювати нулю

$$0 = \delta A = (\delta \vec{r} \cdot \sum \vec{F}_i)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{F} &= \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \vec{F}_i^{(i)} = \vec{F}^{(e)} + \\ &+ \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \vec{F}^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}) = \end{aligned} \right.$$

$$\delta \vec{r} \neq 0, \text{ значить: } \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}) = 0 \quad \text{для ізол. сист за визначенням}$$

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \quad \text{III з.Н.}$$

Висновок: Справедливість III з.Н. і ЗЗІ ізольованої системи мТ зумовлені однорідністю простору

Рух тіл із змінною масою

1.

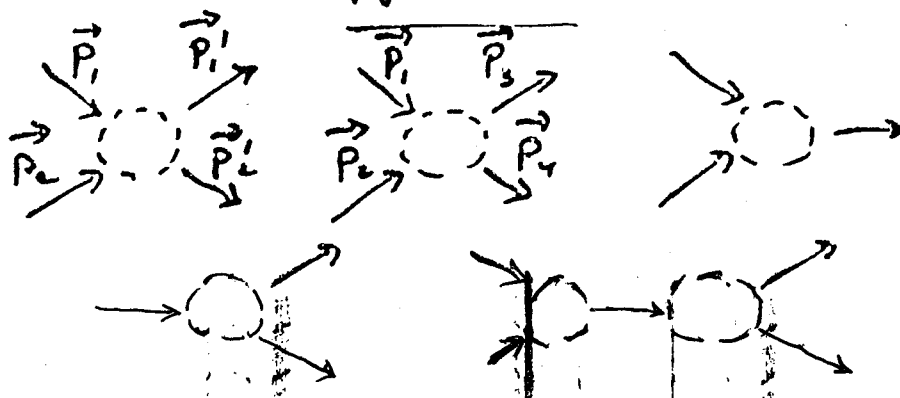
1. Реактивний рух.
2. Рівняння Мещерського.
3. Формули Циолковського.

ЗІТКНЕННЯ

1. Визначення зіткнень і удару.
2. Пружний удар.
3. Векторна діаграма пружн. уд.
4. Розгляд зіткнення в системі центру мас.
5. Сповільнення нейтронів.
6. Комптон-ефект.
7. Непружний удар.
8. Поглинання та випускання фотонів.

Зіткненнями наз. взаємодію двох тіл (частинок), яка відбувається у відносно малий обл. простору та протягом відносно малого проміжку часу, так, що поза цією областю та цим проміжком можна говорити про незалежні тіла

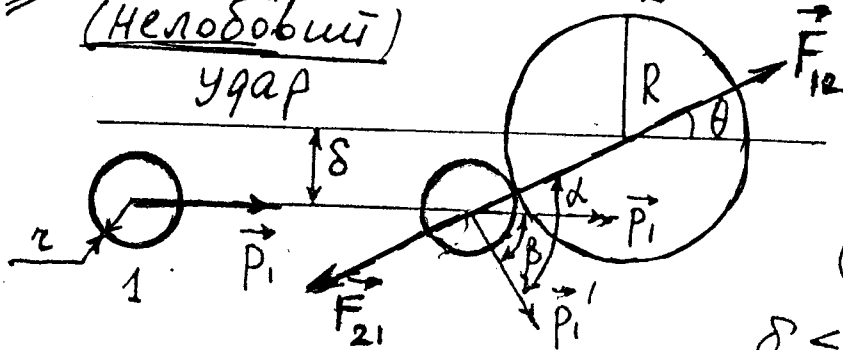
Удар - взаємодія, при якій змінюється імпульс тіл без зміни координат.



Векторна (імпульсна) діаграма пружного співудару (зіткнення) двох куль

2

1. Нецентральний (нелобовий) удар



β - кут відхилення
 $\beta = \pi - \theta$
 θ - кут зміни напрямку імпульсу кулі 2
 δ - принципіальна відстань

$$(R + r) \cdot \sin \theta = \delta$$

$$\delta < R + r \Leftrightarrow \sin \theta \leq 1$$

кут розхвату - $\alpha = \angle \vec{p}_1, \vec{p}_2'$; $\theta = \angle \vec{p}_1, \vec{p}_2'$
 (вибором СВ)

Для $\delta = 0$ (або $\theta = 0$) удар наз. лобовим (центровим)

$$\begin{cases} (1) \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \\ E_k = E_{k1}' + E_{k2}' \quad (33 \text{ енерг.}) \end{cases}$$

$$(2) \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad \text{33 імпульсу}$$

$$(2') : \vec{p}_1' = \vec{p}_1 - \vec{p}_2' \quad \xrightarrow{(2') \rightarrow (1)} \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2')^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} - \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2')}{m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad | \quad \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2')}{m_1} = \frac{p_2'^2}{2} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)$$

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2' = p_1 p_2' \cos \theta = p_2'^2 \frac{m_1 + m_2}{2m_2}$$

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos \theta$$

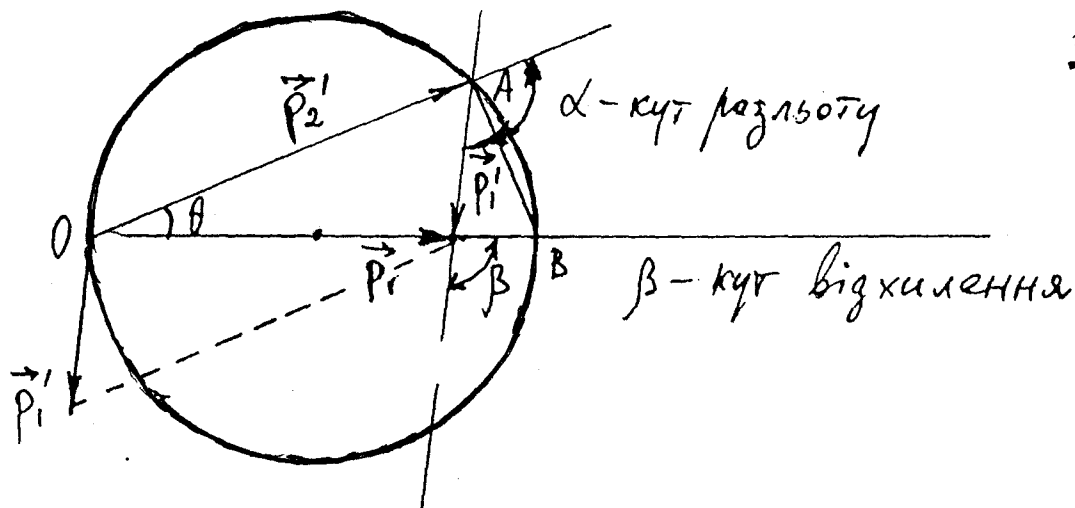
$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos \theta$$

Побудова векторної діаграми

Випадає $m_1 < m_2$ або $\frac{2m_2}{m_1 + m_2} > 1$.

Дано: $p_1; m_1; m_2;$
 θ

Знайти: $\vec{p}_2'; \vec{p}_1'; \alpha;$
 β



1. Проводимо з т.О вектор \vec{p}_1
2. Будемо коло діаметром $\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot p_1\right)$, щоб воно проходило ^{через т.О}
3. Знаючи кут θ , будемо \vec{p}_2'
4. Отримуємо \vec{p}_1'
5. З $\triangle OAB$ знаходимо $p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cdot \cos \theta$
6. З векторної діаграми отримуємо \vec{p}_2', \vec{p}_1' , кути β, α .

Аналіз: 1) $\pi/2 < \alpha < \pi$

2) $0 < \beta < \pi$ (частинка 1 може відхилитися дуже мало, а може змінити свій рух на протилежний).

3) Усі характеристики зіткнення виражаються кутом θ . Конкретне значення θ закони збереження не дають, хоча $\theta = \arcsin \frac{\delta}{k+2}$.

4) Максимальне значення p_1' , коли $\theta = 0$ - лобовий удар

Матвеев (рос.: с. 224; укр. с. 203)
Стрелков с. 123

$$P_2' = \frac{2m_2}{m_1+m_2} P_1 \cos \theta$$

$m_1 > m_2$

$\frac{2m_2}{m_1+m_2} < 1$

$\sin \beta_{\max} = \frac{m_2}{m_1}$

$\alpha = 0 \div \frac{\pi}{2}$
 $\beta = 0 \div \beta_{\max}$

$m_1 < m_2$

$\frac{2m_2}{m_1+m_2} > 1$

$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2}$
 $\beta = \theta \div \pi$

$m_1 = m_2$

$\frac{2m_2}{m_1+m_2} = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$
 $\beta = 0 \div \frac{\pi}{2}$

$m_1 \gg m_2$

$P_2' \approx 2 \frac{m_2}{m_1} P_1; P_2' \ll P_1$
 $V_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} V_1 \Rightarrow V_2' \approx 2V_1$
 $E_2' = 4 \frac{m_2}{m_1} E_1; E_2' \ll E_1$

$m_1 \ll m_2$

$P_2' = 2P_1; V_2' = 2 \frac{m_1}{m_2} V_1$
 $V_2' \ll V_1$
 $V_1' = -V_1$
 $E_2' = 4 \frac{m_1}{m_2} E_1$
 $E_2' \ll E_1$

$m_1 = m_2$

$P_2' = P_1; V_2' = V_1$
 $E_2' = E_1; V_1' = 0$

$\theta = 0$ (центр масс)

$P_2' = \frac{2m_2}{m_1+m_2} P_1; E_2' = \frac{4m_2}{(m_1+m_2)^2} P_1^2$
 $V_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} V_1; V_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} V_1$

Рух тіл із змінною масою. Реактивний рух.

⑤

- 1) $\vec{v} \ll c$ 2) маса змінюється за рахунок маси самої тіла 3) Розглянемо випадок ракети:

$$m(t), \vec{v}(t), \vec{r}(t) \rightarrow \begin{matrix} (m - \Delta m) \cdot (\vec{v} + \Delta \vec{v}) \\ (m + dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) \end{matrix} \left| \begin{matrix} dm = -\Delta m \\ dm < 0 \end{matrix} \right.$$

Крім $\Delta \vec{r}_{\text{рак}}$ є і ін. (кількість руху) газів, які утворились за час dt . Він дорівнює $dm_{\text{газ}} \cdot \vec{v}_{\text{газ}}$

Закон збереження імпульсу:

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{\text{газ}} \cdot \vec{v}_{\text{газ}} - m\vec{v} = \vec{F} \cdot dt \quad (1)$$

\vec{F} - геом. сума всіх зовн. сил, які діють на ракету

$$m\vec{v} + m \cdot d\vec{v} + dm \cdot \vec{v} + \underbrace{dm \cdot d\vec{v}} + dm_{\text{газ}} \cdot \vec{v}_{\text{газ}} - m\vec{v} = \vec{F} \cdot dt$$

- нехтуємо $dm \cdot d\vec{v}$

- маса зберігається (закон збереж. маси): $dm = -dm_{\text{газ}}$

- введемо відн. шв. $\vec{u} = \vec{v}_{\text{газ}} - \vec{v}$, \vec{u} - шв. вибігання газів відносно ракети

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{u} \cdot dm + \vec{F} \cdot dt \quad (2)$$

$$\boxed{m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{dm}{dt} + \vec{F}} \quad \text{Рівняння Мещерського} \quad (3)$$

$\vec{u} \cdot \frac{dm}{dt}$ - реактивна сила (сила тяги ракети)

Неправильно, але наближено: $\vec{u} = -\vec{v}$. Тоді

$$\left| m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = \vec{F}} \right|$$

$$\text{Для ракети } \vec{F} = 0 \Rightarrow m \cdot d\vec{v} = \vec{u} \cdot dm \quad (4)$$

У скалярному вигляді: $m \cdot dv = -u \cdot dm$

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m}$$

Якщо $u = \text{const}$, то

6

$$\int dV = - \int \frac{u}{m} \cdot dm + c$$

$$V = -u \int \frac{dm}{m} + c = -u \cdot \ln m + c$$

Початк. умови: $t=0$; $V=0$; $m=m_0$

$$0 = -u \cdot \ln m_0 + c \Rightarrow c = u \cdot \ln m_0$$

$$V = u \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{V}{u}}$$

Наслідок р-ня Мещерякова - формула Циолк.

Якщо $t=0$; $V=V_0$; $m=m_0$, то

$$m = m_0 e^{-\frac{V-V_0}{u}}$$

Приклад 1. $V_0=0$; $V=8 \text{ км/с}$; $u=3 \frac{\text{км}}{\text{с}}$

$$\frac{m_0}{m} = e^{8/3} \approx 14 \quad \text{або} \quad m = \frac{m_0}{14}$$

Пр. 2: $V_0=0$; $V=8 \text{ км/с}$; $u=4 \text{ км/с}$

$$\frac{m_0}{m} \approx e^2 \approx 7 \quad m = \frac{m_0}{7}$$

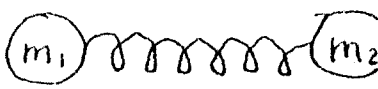
m - "корисна" маса

Сучасні ракети: $u=3 \div 5 \text{ км/с}$

З урахуванням витрат на гальмування при поверненні $m \approx \frac{m_0}{400}$

Динаміка

1. Взаємодія тіл
2. Сила
3. 4 типи взаємодії
4. Динаміка - розділ механіки
5. Межі застосування класичної механіки (динаміки)
6. Маса
7. Імпульс
8. Ізольована система (замкнена система)
9. Імпульс ізольованої системи

 $t_1: \vec{v}_1 \text{ та } \vec{v}_2 \quad (\vec{r}_1 \text{ та } \vec{r}_2)$

Через певний проміжок часу $\Delta t: \vec{v}_1' \text{ та } \vec{v}_2' \quad (\vec{r}_1' \text{ та } \vec{r}_2')$

$\Delta \vec{r}_1 = m_1 \Delta \vec{v}_1$ та $\Delta \vec{r}_2 = m_2 \Delta \vec{v}_2$ де $\Delta \vec{v}_{1,2} = \vec{v}_{1,2}' - \vec{v}_{1,2}$ (1)

Збереження Пружина однакової на обидві МТ, та $\Delta \vec{r}_1$ і $\Delta \vec{r}_2$ паралельно напружені (-)

$\Delta \vec{r}_1 = -\Delta \vec{r}_2 \Rightarrow m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2$ (2)

$\frac{m_1 \cdot \Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = -\frac{m_2 \cdot \Delta \vec{v}_2}{\Delta t} \Rightarrow m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$ (3)

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$ (4) Висновки: 1, 2, 3, 4, 5, 6

(1) \rightarrow (2): $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}'$

Повний імпульс ізол. системи зберігається (не змінюється)
у гасі - закон збереження імпульсу

10. Момент імпульсу МТ: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Закони Ньютона
11. Момент сили МТ: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
12. Рівняння моментів для МТ

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$

$\vec{F} \parallel \vec{r}$
Колінарні вектори при добутку дають 0

13. Імпульс системи мат. точок (СМТ)

2.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$$

14. Момент імпульсу СМТ (відносно т.О, яку обирають за початок СК)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

15. Сила, що діє на СМТ

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \text{ де } \vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(i)} \quad (F_{ii} = 0; \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji})$$

$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$ — геом. сума всіх внутр. сил, що діють у системі, = 0

$$\vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_2^{(i)} + \dots + \vec{F}_n^{(i)} = 0. \text{ Тоді } \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}$$

Сила, яка діє на СМТ, дорівнює сумі зовн. сил, які діють на МТ

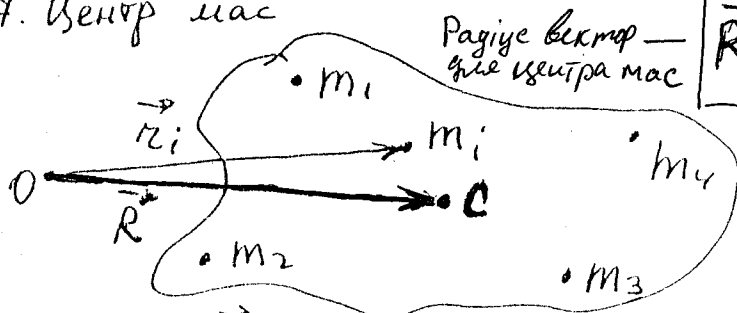
Момент сили, що діє на СМТ, $\vec{M} = \vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)} = \vec{M}^{(e)}$

16. Рівняння руху СМТ

Якщо $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ та рівняння руху 1-ї МТ має вигляд $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1$

то $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}^{(e)}$ — сума зовнішніх сил

17. Центр мас



$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (1)$$

Продиф (1) по часу та до-
множимо на m

$$m \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots$$

→ швидкість центра мас

або $m \cdot \vec{V}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = \vec{p}$ — Узн. ц.м. дорівнює повному імпульсу СМТ

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{V}_c} \quad (2) \quad \vec{V}_c = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{v}_i$$

Будь $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$ (3). Продиф (2) і порівняємо з (3):

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F}^{(e)}} \quad \text{Теорема руху центра мас}$$

Ц.м. будь-якої системи частинок рухається так, якби вся маса системи концентрована в одній точці — ц.м. і до неї прикладені всі зовнішні сили.

Якщо СМТ ізольована ($\vec{F}^{(e)} = 0$), то $\frac{d\vec{V}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V}_c = \text{const.}$

Для замкненої системи ц.м. рухається пряминою та рівномірно

Динаміка

Кінематика вивчає способи опису руху і не цікавиться причинами, які його викликають.

Динаміка вивчає закони руху, причини, які викликають рух і впливають на нього.

В центрі динаміки — сила і система відліку (СВ).

Кількість СВ — нескінченна.

В різних СВ закони механіки мають різний вигляд. Виникає задача — відшукати таку СВ, в якій закони механіки мають більш простий вигляд.

I закон Ньютона: завжди можна знайти таку СВ, в якій прискорення МТ цілком обумовлене лише взаємодією МТ з іншими тілами.

Вільна МТ (частинка), на яку не діє ніяке інше тіло, рухається відносно такої СВ прямолінійно та рівномірно („по інерції“). Таку СВ називають інерціальною (УСВ).

I закон Н. \equiv закон інерції Галілея — Ньютона: існують СВ, які наз. інерціальними, в яких при відсутності дії з боку інших тіл частинка зберігає стаціонарний стан руху: рухається рівномірно і прямолінійно або покоїться.

Існування УСВ підтверджується досвідом.

Спочатку вважали, що УСВ є Земля. Потім — геліоцентрична система (система Коперника). Потім — система зірок. Потім — реліктове випромінювання. З цією метою шукали ефір.

Абсолютної системи відліку — НЕ ІСНУЄ
(ефіру).

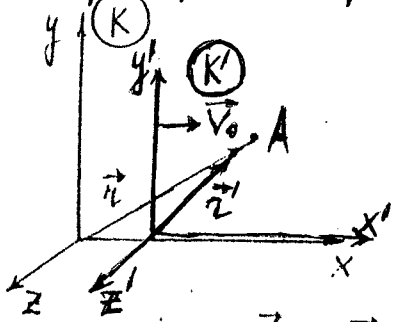
СВ, які рухаються із прискоренням або обертаються відносно ІСВ, називаються неінерціальними (НІСВ).

Важливою особливістю ІСВ є визначені властивості симетрії часу і простору в них: в ІСВ час однорідний, а простір однорідний і ізотропний.

По відношенню до НІСВ простір не є однорідним та ізотропним, а час - однорідним.

Для ІСВ справедливий принцип відносності
Галілея: Всі ІСВ по своїм механічним властивостям еквівалентні одна одній.
 Або: ніякими механічними дослідами, які проводяться всередині даної ІСВ, не можна встановити, похаїться ця система або рухається прямилинітно і рівномірно.
 Або: в усіх ІСВ властивості простору і часу однакові.
 Або: в усіх ІСВ всі закони механіки однакові.

Перетворення при переході від однієї ІСВ до іншої:
 (Перетворення Галілея).



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t \quad (1)$$

$$t' = t \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x' = x - V_0 t \\ y' = y; \quad z' = z \end{cases} \quad (3)$$

Продиференціюємо (3):

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_0 \quad (4)$$

Продиференціюємо (4): $\vec{a}' = \vec{a} \quad (5)$

Прискорення інваріантне в усіх ІСВ. - однаковість, незмінність, збереженість з однієї системи відліку в іншу.

Швидкість - не інваріантна величина
Прискорення - інваріантна величина.

(Додаток) Інтеріалона Система Відліку - система відліку яка рух без прискорення та не обертається - система в якій виконуються закони Ньютона.

II закон Ньютона

В ІСВ будь-яке прискорення тіла викликає дією на нього якогось інших тіл. Зміна стану руху тіла є результатом взаємодії з іншими тілами.

Вплив іншого тіла (або тіл), який викликає прискорення частинки, називається силою.

Причиною прискорення тіла є дія на нього сили.

Всі сили в механіці підрозділяються на контактні сили (сила тиску, тертя) та сили, які виникають під дією полів (сила гравітації, ел. магн.).

Міра інертності тіла називається масою. (Інертність проявляється у тому, що тіло "проявляє опір" на намагання змінити його стан.

Властивості маси: 1) маса - величина аддитивна: маса збірного тіла дорівнює сумі мас його складових частин; 2) маса тіла - величина стала, яка не змінюється при його русі.

Сила є причиною прискорення тіла

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

Імпульс частинки: $\vec{p} = m \vec{v}$. Імпульс сили:

II закон Н.: $d\vec{p}/dt = \vec{F} \quad (2) \quad \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$

(2) має більш загальний характер, ніж (1);

(2) можна застосувати і для $v \sim c$ - шв. світла.

Принцип суперпозиції: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$ Принцип суперпозиції це практичне складання де \vec{F}_i - сила, з якою на дану мт діло би i-е тіло у відсутності інших тіл. векторів.

Теле механіка і рух порушують єдиний час.

III закон Ньютона.

4.

Дія тіл одне на інше має характер взаємодії.

Сили, з якими дві МТ взаємодіють між собою, завжди рівні за модулем і протилежні за напрямом, діють вздовж прямої, яка з'єднує ці точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Сили взаємодії завжди діють парами.

Обидві сили прикладені до різних МТ.

Обидві сили мають однакову природу.

Принцип дальності класичної механіки; миттєва передача взаємодії. Сугасна точка зору на швидкість передачі взаємодії — теорія близькодії.

Зауваження:

1) III закон Ньютона має принаймні 2 виключення.

- ▶ пов'язаний з рухомими і електричними частинками
- ▶ гравітаційна взаємодія m_1 і m_2 прагне до нуля з матеріальних тіл зменшує своє напруження в просторі і час передачі менший

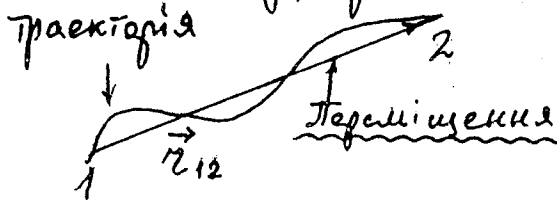
В системі де є поле там нема класичної механіки, і

III закон Ньютона порушується.

Швидкість

Матеріальна точка (МТ) - тіло, розмірами якого в умовах даної конкретної задачі можна знехтувати.

Траекторія - лінія, яку описує МТ при своєму русі. В залежності від форми траекторії рух може бути прямолінійним, рухом по колу, криволінійним тощо.



$\Delta \vec{r}$ - вектор переміщення

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 =$$
$$= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}$$

де $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta z = z_2 - z_1$

Середня швидкість $\langle \vec{v} \rangle$ за проміжок часу Δt

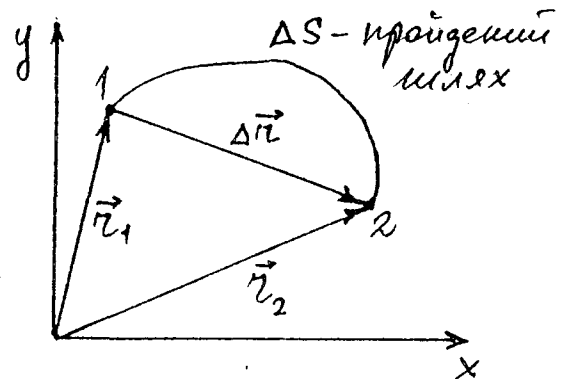
$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$\langle \vec{v} \rangle$ - вектор, напрям якого збігається з напрямом переміщення $\Delta \vec{r}$

Миттєва швидкість (або просто - швидкість):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1)$$

\vec{v} - вектор, напрямом якого збігається із напрямом дотичної до траекторії у напрямі руху



Швидкість є функція часу: $v(t)$

$$3 (1): d\vec{r} = \vec{v}(t) \cdot dt$$

Інтегрування за довільними кінцями часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\int_{r(t_0)}^{r(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) \cdot dt$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) \cdot dt} \quad \text{Кінематичне рівняння руху}$$

У декартових координатах:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

$$\text{де } v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad v - \text{модуль вектора шв.}$$

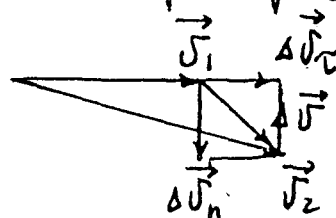
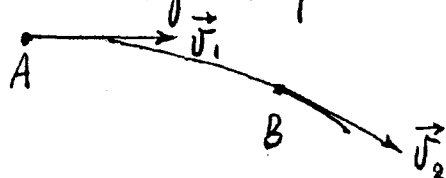
$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Скалярна середня швидкість $\langle v_{\text{ск}} \rangle = \frac{s}{t}$

$$\langle v_{\text{ск}} \rangle = \frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

Прискорення

МТ може рухатись нерівномірно: її швидкість змінюється із часом за модулем і напрямком. Такий рух називається змінним і характеризується прискоренням.



$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Середнє прискорення за час Δt

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Миттєве прискорення (або прискорення)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

При змінному русі $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

$$d\vec{v} = \vec{a}(t) \cdot dt$$

Швидкість за проміжком часу від t_0 до t

$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) \cdot dt$$

Середнє прискорення $\langle \vec{a} \rangle = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \vec{a}(t) \cdot dt$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

4

$$\text{де } a_x = \frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d\vec{v}_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d\vec{v}_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Розкладемо вектор $\Delta \vec{v}$ на два взаємно перпендикулярні: $\Delta \vec{v}_\tau$ та $\Delta \vec{v}_n$ — тангенціальну та нормальну складові, відповідно.

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_\tau + \Delta \vec{v}_n$$

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Тангенціальне (дошвидкостне) прискорення \vec{a}_τ характеризує зміну \vec{v} за модулем

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Нормальне прискорення a_n характеризує зміну \vec{v} за напрямом

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Рівнозмінний рух: $a = \text{const} \neq f(t)$

Рівноприскорений рух: $a > 0$

Рівносповільнений рух: $a < 0$

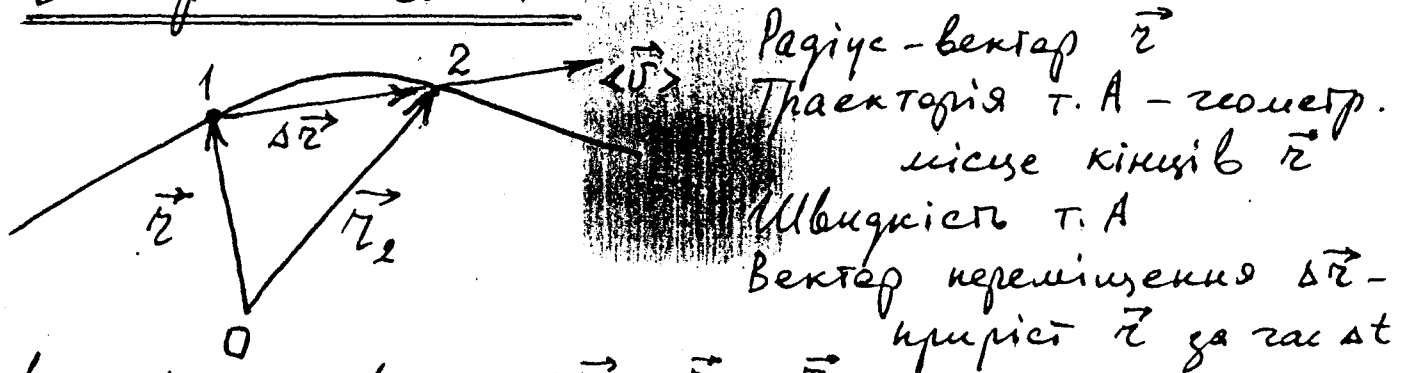
Якщо $a(t)$, то рух — нерівномірно-прискорений

Якщо $a = 0$, то рух рівномірний (без прискорення, із сталою швидкістю).

3 (три) ^{способи} опису руху МТ:

- 1) - векторний; 2) - координатний
- 3) - за допомогою параметрів траєкторії, або природний (рос. - "естественный").

I. Векторний спосіб



вектор сяр. шв

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

вектор миттєвої шв.

Напрямок $\langle \vec{v} \rangle$ співпадає з $\Delta \vec{r}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$|\vec{v}| = v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$$

Х-ки руху т. А: швидкість та прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$|\vec{a}| = a = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|$$

Описати рух МТ - значить знайти, за яким законом змінюється $\vec{r}(t)$ або $\vec{v}(t)$ при відомих (заданих) початкових умовах: $\vec{v}(t_0)$ або $\vec{r}(t_0)$.

Пряма задача кінематики:

Дано: $\vec{r}(t)$ Знайти: $\vec{v}(t)$; $\vec{a}(t)$; $|\vec{v}| = f(t)$

Приклад: $\vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}t^2/2$

\vec{A}, \vec{B} - сталі вектори
їх модулі мають бігубігні
розмірності

$$1) \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A} + \vec{B}t$$

$$2) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{B} = \text{const} (\neq f(t))$$

$$3) v = |\vec{v}| = \sqrt{v^2} = \sqrt{\vec{A}^2 + 2\vec{A}\vec{B}t + \vec{B}^2t^2}$$

Обернена (зворотня) задача кінематики

Дано: закон зміни у часі прискорення: $\vec{a}(t)$

Знайти: $\vec{v}(t)$; $\vec{r}(t)$ ① Знайдемо $\vec{v}(t)$:

Розв'язок: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

$$v_x = \int_0^t a_x dt; \quad v_y = \int_0^t a_y dt; \quad v_z = \int_0^t a_z dt$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ - за визнач. } \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$$

$$\int d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \Delta \vec{v} \quad (1) \quad \begin{cases} \vec{v}_0 - \text{початкова шк.} \\ \vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t=0) \equiv \vec{v}(0) \end{cases}$$

Оскільки залежності $\vec{a}(t)$ - задано!!

Треба знати початкові умови: $v(0)$ та $r(0)$

Продовжимо: з інш. боку $\Delta \vec{v} = \int_0^t \vec{a} dt = \vec{a} \int_0^t dt = \vec{a} \cdot t$

Послуємо (1) та (2):

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}t$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \Delta \vec{v} + \vec{v}_0 = \vec{a}t + \vec{v}_0} \quad (A)$$

② Знайдемо $\vec{r}(t)$:

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \quad (3) \text{ - за визначенням швидкості}$$

$$\text{Інтегруємо (3): } \int_{r_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \Delta \vec{r}$$

$$\text{З іншого боку: } \Delta \vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) \cdot dt = \int_0^t (\vec{a}t + \vec{v}_0) dt =$$

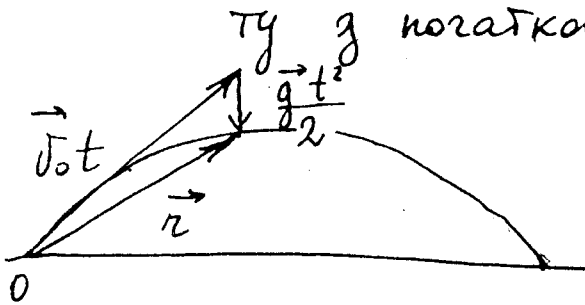
$$= \int_0^t \vec{a}t dt + \int_0^t \vec{v}_0 dt = \frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{v}_0 t = \Delta \vec{r}(t) \quad (B)$$

Але знайдений $\Delta \vec{r}$ ще не $\vec{r}(t)$! Треба знайти $\vec{r}(t)$!

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad \text{— за визначення.}$$

$$\vec{r}(t) = \Delta \vec{r} + \vec{r}_0 = \frac{\vec{a} t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad ! \quad (5)$$

Приклад: камінець, кинутий під кутом до горизонту з початковою швидкістю \vec{v}_0 .



$$\vec{a} = \text{const} = \vec{g}$$

$$\vec{r}_0 = 0 \quad \text{відносно т. кидку}$$

$$\text{З (5): } \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

Вектор $\vec{r} \in$ сумою 2-х векторів

II. Координатний спосіб.

Обов'язково треба обрати СК! (СК-система координат)

$x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ — закон руху МТ (дано)

Знайти $\vec{v}(t)$; $\vec{a}(t)$; $|\vec{v}| = f(t)$

Розв'язок:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

dx — проекція вектора переміщення $d\vec{r}$ на ось Ox

$$v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

dv_x — проекція вектора прискорення $d\vec{v}$ на ось Ox

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Напрямок \vec{v} задається направленими косинусами

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

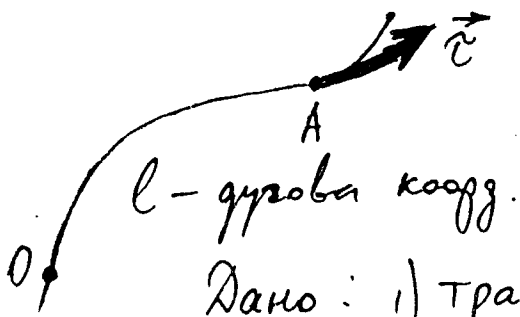
$$\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{v})$$

$$\beta = \angle(\vec{y}, \vec{v})$$

$$\gamma = \angle(\vec{z}, \vec{v})$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

III. Опис руху за заданим законом параметрів траєкторії



l - дугова коорд.

l - відстань вздовж траєкторії від обраного початку відліку

- Дано:
- 1) траєкторія руху т. А
 - 2) початок відліку (т. О)
 - 3) додатний напрямок відліку дугової координати
 - 4) закон руху т. А (тобто $l(t)$).

Швидкість точки

Введемо одичиний вектор \vec{e} , направлений по дотизній в даній точці траєкторії в сторону зростання дугової коорд.

\vec{e} - змінний вектор: $\vec{e}(t)$!

Вектор \vec{v} шв. т. А направлений по дотизній (за визн.)

Тому $\boxed{\vec{v} = v_e \cdot \vec{e}} \quad (1)$

1, а $\boxed{v_e = |\vec{v}| = v} \leftarrow \text{з (1)}$

З інш. боку $\boxed{v_e = \frac{dl}{dt}}$

проекція вектора \vec{v} на напрям вектора \vec{e} (тех за визн.)

3 (1) $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{e}} \quad v(t)$

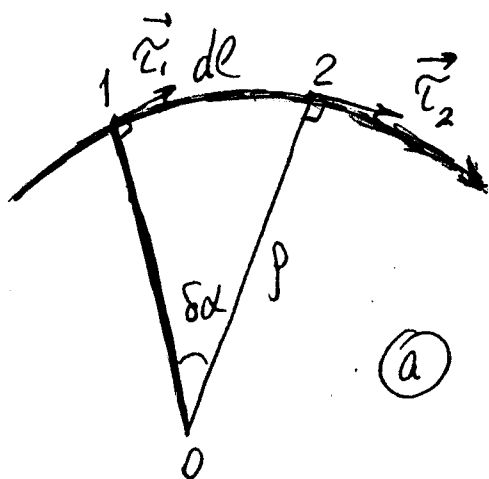
Прискорення точки

Диференц. (1) по часу.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_e}{dt} \cdot \vec{e} + v_e \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \quad (A)$

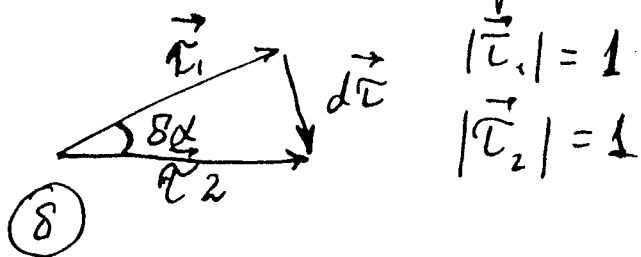
II доданок (A): $v_e \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} = v_e \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \cdot \frac{dl}{dl} = v_e \cdot \frac{d\vec{e}}{dl} \cdot \left(\frac{dl}{dt}\right) =$
 $= v_e \cdot \frac{d\vec{e}}{dl} \cdot v_e = v_e^2 \cdot \frac{d\vec{e}}{dl} \quad \uparrow \quad (1, a) \quad (B)$

Визначимо приріст вектора $\vec{\tau}$ на ділянці dl : $\frac{d\vec{\tau}}{dl}$:



(a)

$\vec{\tau}_{1,2}$ - одиничні (!) вектори



(б)

$$|\vec{\tau}_1| = 1$$

$$|\vec{\tau}_2| = 1$$

1. Спрямуємо т. 2 до т. 1. Результатом буде:

- відрізок траєкторії dl прямує до дуги кола з центром в деякій т. O
- т. O назвемо в цьому випадку центром кривизни траєкт. в даній т. A, а радіус ρ відповідає радіусу кола.

2. з (a): $d\alpha = \frac{|d\vec{e}|}{\rho}$ (2)

з (б) $d\alpha = \frac{|d\vec{\tau}|}{1} = |d\vec{\tau}|$ (3) (4)

(2) = (3): $\frac{|d\vec{e}|}{\rho} = |d\vec{\tau}|$, або $\frac{dl}{\rho} = d\tau$, або $\boxed{\frac{d\tau}{dl} = \frac{1}{\rho}}$ кривизна

Якщо $dl \rightarrow 0$, то $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$ (це видно з рис. (б))

Введемо один. вектор \vec{n} нормалі до траєкторії в т. 1, направлений до центру кривизни. У формулі (4) $\cdot \vec{n}$

$\frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad d\vec{\tau} \parallel \vec{n} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{\rho}}$ (5)

(5) \rightarrow (A) із урахуванням (5):

$\vec{a} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + \tau^2 \frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + \tau^2 \frac{\vec{n}}{\rho} = \boxed{\frac{d\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \vec{a}}$ (6)

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e} - \text{тангенс. приск.}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} - \text{нормальне приск.}$$

$$\left| \vec{a}_\tau \right| = a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$$\left| \vec{a}_n \right| = a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Модуль повного прискорення:

$$\left| \vec{a} \right| = a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho} \right)^2}$$

було (1.2):

$$v_\tau = v \Rightarrow \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Аналіз:

1. Вектори \vec{a}_τ та \vec{a}_n взаємно перпендикулярні.
2. \vec{a}_τ направл. уздовж траєкторії руху, (по дотичній до траєкторії)
3. \vec{a}_n направл. уздовж нормалі до траєкторії руху, до центру кривизни траєкторії.
4. Під час руху МТ по колу норм. приск. наз. доцентровим, оскільки центр кривизни для всіх точок траєкторії один та збігається з центром кола.
5. Модуль танг. прискор. $\left| \vec{a}_\tau \right| = \left| \vec{v} \right| = \dot{v}$
6. Якщо $\dot{v} > 0$ (шв. зростає по величині), то \vec{a}_τ направлений в той же бік, що і \vec{v} (в сторону \vec{v}).
7. Якщо $\dot{v} < 0$ (шв. із часом зменшується), то вектори \vec{v} та \vec{a}_τ направлені в протилежні сторони.
8. При рівномірному русі ($\dot{v} = 0$) танг. прискорення немає ($\vec{a}_\tau = 0$)
9. Величина \vec{a}_n визначається \dot{v} та v : $a_n = \frac{v^2}{\rho}$
10. При прямолінійному русі ($\rho \rightarrow \infty$) $a_n = 0$

Кінематика обертального руху.

$d\vec{\varphi}$ - псевдовектор, або аксимальний вектор

Кутова швидкість $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}; \quad [\vec{\omega}] = \frac{\text{рад}}{c}$$

Для $\vec{\omega} = \text{const}$ - рівномірне обертання: $\omega = \frac{\varphi}{t}$

Період обертання
Число обертів за
одиницю часу

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

тіло робить 1 оберт:
 $\varphi = 2\pi; \Delta t = T$
 $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$

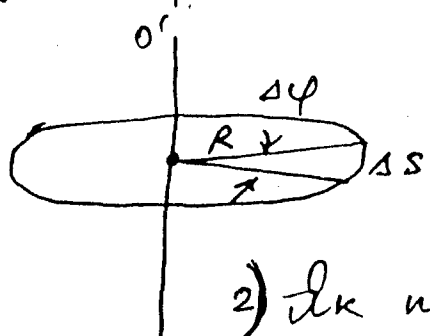
Кутове прискор.

Вектор $\vec{\omega}$ може змінюватися як за велич., так і за напрямк.
за час Δt приростає $\Delta \vec{\omega}$. Тоді

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad [\beta] = \frac{\text{рад}}{c^2}$$

Лінійна швидкість тв. тіла, що обертається

1) $v = f(\omega, R)$



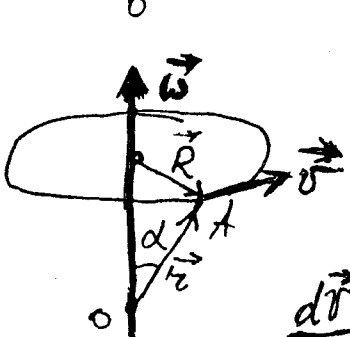
$$\Delta S = R \cdot \Delta \varphi$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

зб'язок зі модулем

$$\boxed{v = R \cdot \omega} \quad (1)$$

2) Як пов'язані вектори \vec{v} та $\vec{\omega}$:



З малюнку: $[\vec{\omega} \vec{r}] \parallel \vec{v}$

$$\omega \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega R \quad \text{або}$$

$$\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]} \quad (2)$$

$$\boxed{\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}}$$

$$a_n = \cancel{\omega^2 R} = \omega^2 R \sim R$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \stackrel{(2)}{=} R \frac{d\vec{\omega}}{dt} \stackrel{(1)}{=} R \cdot \vec{\beta} \sim R;$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R \sqrt{\beta^2 + \omega^4} \sim R$$

Чотири-вектор простору-часу.

3-вектор: $\vec{r}(x, y, z)$

4-вектор: $\vec{s}(x, y, z, ict)$ характеризує

простір-час як одне ціле
Простір і час пов'язані між собою:

$$t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right) \cdot x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(1908 р.)

4-вимірний простір ввів Герман Мінковський

Положення МТ в кожний момент часу визна-
чається 4-ма коорд.: x, y, z, t ($t \rightarrow ct$ або
 $t \rightarrow ict$).

Точка в 4-вимірному просторі наз. світловою точкою
Дух МТ в 4-вимірн. просторі-часі зображається сві-
товою лінією

Ділення у 4-вимірн. пр.-часі наз. подіями
Відстань між 2-ма подіями (світловими точками)
є 4-вимірний вектор переміщення - ΔS

$$\Delta S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 t^2 =$$

$$= \Delta l^2 - c^2 t^2 \quad \text{де } \Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

По Лоренцу: $\Delta l = i\kappa\delta$; $\Delta t = i\kappa\delta$.

По СТБ: $\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$; $\Delta t = \Delta \tau / \sqrt{1 - \beta^2}$

Можна (треба! СРБ!) показати, що $\Delta S^2 = \Delta S'^2 = i\kappa\delta$.

хоча $\Delta l \neq i\kappa\delta$; $\Delta t \neq i\kappa\delta$

ΔS^2 - (просторово-часовий інтервал)² є інваріантом

основна властивість

Три типи інтервалів:

1. Просторово подібний інтервал: $\Delta S^2 > 0 \Rightarrow$

Події в двох світових точках не можуть бути зв'язані причинно. Тоді $\Delta l > ct \Rightarrow \Delta S^2 > 0$.

З того, що $\Delta S^2 = \Delta S'^2$, випливає, що в усіх ІСВ ці події не мають причинно-наслідкового зв'язку: ці події ніяк не можуть впливати одна на одну \equiv не існує способу передати взаємодію (інформ.) із швидкістю $>$ шв. світла $c \equiv$ події, розділені таким інтервалом, ні в одній із СВ не можуть бути просторово суміщеними. Але завжди можна знайти таку СВ, в якій ці події відбуваються одночасно ($\Delta t = 0$).

2. Часовий інтервал: $\Delta S^2 < 0 \Rightarrow$

Для подій, які зв'язані причинним зв'язком, можна завжди знайти таку ІСВ, в якій події відбуваються в одній і тій же самій точці простору в послідовні проміжки часу: $\Delta l = 0$; $\Delta S^2 = -c^2 \Delta t^2 < 0$. Не існує такої СВ, в якій ці

дві події відбувалися б одночасно: тоді мало б бути $\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta S^2 = \Delta l^2 > 0$, що суперечить умові $\Delta S^2 < 0$!

3. Нульовий інтервал: $\Delta S^2 = 0 \Rightarrow$

$\Delta l = ct$: Такий інтервал існує між подіями, які зв'язані між собою взаємодією, що передається із швидкістю світла.